

動力學方法於汽車碰撞之研究

張超群¹ 許哲嘉² 黃國平³

摘要

有鑑汽車碰撞之研究雖有現成的商業軟體可應用，但其價格昂貴，並且使用時需具有較專業的知識。本文探討並如何運用較簡單的動力學的方法於行車事故車輛碰撞的研究。對汽車一維碰撞分析法大致可分為(1)運用動量守恆定律以及恢復係數；(2)運用動量守恆定律及變形深度。本文簡介如何運用上述兩種方法及汽車碰撞後的痕跡，配合動力學中之功能原理來反向計算得到汽車一維碰撞前車速。對於較複雜的汽車二維碰撞分析，本文則採用碰撞圖解法，並說明其原理及使用步驟。

壹、前言

台灣交通相當混亂，經常發生車禍造成人員傷亡，當交通事故處理人員(警察)到達現場時，他是否能夠依據現場留下的證據，如碰撞車輛的相對位置、損壞程度、煞車痕跡等，儘可能的正確還原碰撞前車輛的運動參數，作為以後車輛行車事故的責任認定的參考，讓大家心服口服，便成為重要的研究課題。

汽車是相當複雜的系統，要精確的模擬汽車的碰撞過程並不是件容易的事。目前市面上的商業用軟體如 LS-DYNA3D、PC-CRASH、CAL3D、SMAC [1-5]等為用有限元素法(Finite Element Method)來分析碰撞時汽車的受力和變形。但由於有限元素法的網格建立需要相當長的時間，同時有限元素的模擬需要完整且正確的力學參數，如材料的彈性模數、蒲松比等。不同的車型有不同的參數，且執行程式須有相當的有限元素法及力學基礎，建模完成後的模擬也需要很長的執行時間，這並不是一般事故鑑定人員及記錄人員(例如交通警察)可了解並應用的。因此，前述之商業用軟體主要用於汽車廠在設計階段時的碰撞模擬，以便修改汽車結構參數，改進汽車及人體在碰撞時的安全性。本文的主要目的是運用簡單的動力學原理來做汽車碰撞分析，並用例題加以說明，讓一些鑑定人員或警察可以很簡單快速的計算出碰撞時的車速，作為肇事責任鑑定之參考。

1 南台科技大學機械工程系副教授。

2 南台科技大學機械工程系講師。

3 成功大學交通管理科學系副教授。

雖然汽車碰撞的情形繁多，但從動力學的角度來看，大致可分為一維碰撞、二維碰撞以及三維碰撞。對汽車一維碰撞分析所用的動力學方法可分為兩大類：第一類用衝量與動量原理結合恢復係數及摩擦係數來計算碰撞前後的速度變化；第二類用衝量與動量原理，再配合量測碰撞的變形量來估算碰撞有效速度，最後計算出碰撞開始及結束之車速。對於二維碰撞雖可用複雜的動力學方法求解，但本研究則介紹較簡單易懂應用動量守恆定律的圖解法。

貳、碰撞過程與基本假設

車輛交通事故分析是根據現場的證據，如車輛煞車痕跡、碰撞後車輛的相對位置、車體變形、散落物等，利用力學原理與經驗法則儘可能準確地分析事故前車輛的速度等運動參數，作為事故責任認定之參考。對交通事故重建之研究，車輛碰撞過程可分為三個階段：

一、碰撞前階段

從駕駛感覺要踩煞車到兩車剛接觸，稱為碰撞前階段。

二、碰撞階段

從兩車剛接觸到剛分離之階段，稱為碰撞階段。

三、碰撞後階段

從兩車剛分離到車子完全停止，稱為碰撞後階段。

車輛碰撞過程分析基本假設如下：

- 一、由於碰撞的時間極短，其他的力如重力、地面的反作用力與碰撞力比是很小的，因此可忽略不計。
- 二、因碰撞的時間極短，物體的位移極小，可以忽略不計，但速度卻有很大的變化。根據這一假設，碰撞變形期與恢復期都是在同一位置完成的。

參、汽車一維碰撞

所謂汽車一維碰撞是指碰撞是發生在車身的前後方向（縱軸），並且運動與變形也是沿著縱軸方向。因此，只要用一個座標軸就可完整描述兩車的運動狀態，例如完全正面碰撞、尾部追撞便是一維碰撞。做一維碰撞分析時須先定某一方向為正，若汽車的速度方向與定的方向相同取正值，反之則速度取負值。

3.1 正面碰撞

3.1.1 應用恢復係數

根據前面碰撞的基本假設，當汽車碰撞時，碰撞力遠大於其他非碰撞力（如輪胎和地面之間的摩擦力、重力等）。因此，非碰撞力在碰撞階段可忽略不計，而對這兩輛汽車組成的碰撞系統，碰撞力屬於內力，系統沒有受到外力的作用，因此系統碰撞前後動量守恆[6-7]，即

$$m_A v_{A_0} + m_B v_{B_0} = m_A v_A + m_B v_B \quad (1)$$

其中 m_A 及 m_B 分別為汽車 A 和 B 的質量； v_{A_0} 及 v_{B_0} 分別為汽車 A 和 B 碰撞開始的速度； v_A 及 v_B 分別為車輛 A 和 B 碰撞結束時的速度。應用恢復係數[6-7]的定義：

$$e = \frac{v_B - v_A}{v_{A_0} - v_{B_0}} \quad (2)$$

可得碰撞結束汽車 A 和 B 的速度：

$$v_A = v_{A_0} - \frac{m_B}{m_A + m_B}(1 + e)(v_{A_0} - v_{B_0}) \quad (3)$$

$$v_B = v_{B_0} - \frac{m_A}{m_A + m_B}(1 + e)(v_{A_0} - v_{B_0}) \quad (4)$$

從上面兩式我們也可以反推以碰撞結束速度表示的碰撞開始速度：

$$v_{A_0} = \frac{m_A v_A + m_B v_B}{m_A + m_B} - \frac{m_B}{m_A + m_B} \cdot \frac{v_A - v_B}{e} \quad (5)$$

$$v_{B_0} = \frac{m_A v_A + m_B v_B}{m_A + m_B} + \frac{m_A}{m_A + m_B} \cdot \frac{v_A - v_B}{e} \quad (6)$$

碰撞的能量損失 ΔE ：

$$\begin{aligned} \Delta E &= \left(\frac{1}{2} m v_{A_0}^2 + \frac{1}{2} m v_{B_0}^2 \right) - \left(\frac{1}{2} m_A v_A^2 + \frac{1}{2} m_B v_B^2 \right) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{m_A m_B}{m_A + m_B} (1 - e^2) (v_{A_0} - v_{B_0})^2 \end{aligned} \quad (7)$$

對於汽車碰撞，恢復係數 e 的範圍一般在 0.1 到 0.3 之間，當兩車速度差越大時，塑性變形越大，恢復係數就越小，甚至等於零。當 $e=0$ 時， $v_B = v_A$ ，即碰撞後兩車是接觸在一起運動的。

應用碰撞後汽車的滑行距離與恢復係數求碰撞前車速的流程圖，如圖 1 所示，其說明如下：

汽車碰撞結束時之速度大小，可應用動力學之功能原理[6-7]求得。在碰撞結束時 A 車和 B 車的動能為

$$T_{A1} = \frac{1}{2} m_A v_A^2, \quad T_{B1} = \frac{1}{2} m_B v_B^2 \quad (8)$$

A 車與 B 車分別滑行了 s_A 及 s_B 距離後停止，此時之動能為零，即

$$T_{A2} = T_{B2} = 0 \quad (9)$$

滑行過程中地面對輪胎的摩擦力作的功 $U_{1 \rightarrow 2}$ 為負功，即對 A 車

$$U_{1 \rightarrow 2} = -\mu_A m_A g s_A \quad (10)$$

對 B 車

$$U_{1 \rightarrow 2} = -\mu_B m_B g s_B \quad (11)$$

式中 μ_A 和 μ_B 分別為 A 車和 B 車輪胎與地面之附著係數（摩擦係數）。將方程式(8)至(11)代入功能原理方程式[6-7]：

$$T_1 + U_{1 \rightarrow 2} = T_2 \quad (12)$$

可得

$$\frac{1}{2} m_A v_A^2 - \mu_A m_A g s_A = 0, \quad \frac{1}{2} m_B v_B^2 - \mu_B m_B g s_B = 0 \quad (13)$$

解得碰撞結束之車速：

$$v_A = \sqrt{2\mu_A g s_A}, \quad v_B = \sqrt{2\mu_B g s_B} \quad (14)$$

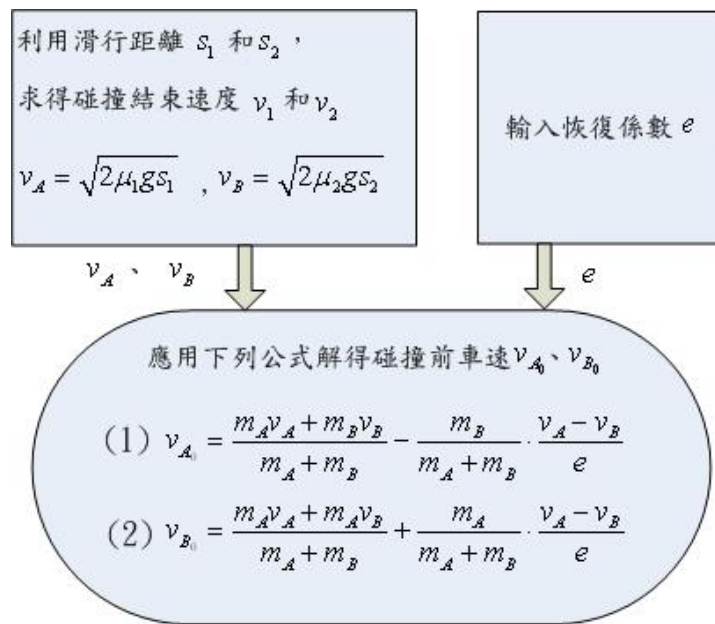


圖 1 汽車正面碰撞逆向解出碰撞前之車速之流程圖

使用上述方法時需確定恢復係數之值，經過大量實驗，汽車正面碰撞恢復係數 e 和有效碰撞速度 v_e （見 3.1.2 節之說明）之間的關係，如圖 2 所示[8]。

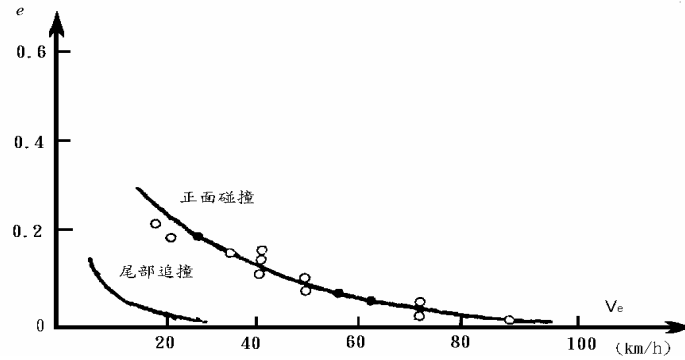


圖 2 恢復係數 e 和有效碰撞速度 v_e 之關係

3.1.2 用塑性變形及有效碰撞速度的經驗公式反推碰撞前速度

由於恢復係數 e 之值不易測得，因此通常用塑性變形及有效碰撞速度之間的經驗公式來反推算碰撞前之速度[8-9]。此法之原理與步驟敘述如下：

一、求碰撞變形最大時兩車共同速度 v_c

兩車剛碰撞接觸時因初速 v_{A_0} 及 v_{B_0} 不同而互相壓縮變形，使得兩車的速度越來越接近。當變形達到最大時，兩車有相等的共同速度 v_c ，此時應用動量守恆定律於變形期，得

$$(m_A + m_B)v_c = m_A v_{A_0} + m_B v_{B_0} \quad (15)$$

得共同速度 v_c ：

$$v_c = \frac{m_A v_{A_0} + m_B v_{B_0}}{m_A + m_B} \quad (16)$$

二、求有效碰撞速度

所謂有效碰撞速度 v_e 是指變形期內車輛的速度變化，也就是車輛碰撞前的速度與共同車速 v_c 之差，即

$$v_{eA} = v_{A_0} - v_c = \frac{m_B}{m_A + m_B} (v_{A_0} - v_{B_0}) \quad (17)$$

$$v_{eB} = v_c - v_{B_0} = \frac{m_A}{m_A + m_B} (v_{A_0} - v_{B_0}) \quad (18)$$

其中 v_{eA} 與 v_{eB} 分別為車輛 A 及 B 的有效碰撞速度。

三、碰撞塑性變形及有效碰撞速度

根據大量的轎車正面碰撞的實驗，獲得了有效碰撞速度 v_e 和碰撞塑性變形平均深度 δ 之間的關係[8]

$$v_e = 29.25\delta \quad (19)$$

式中 v_e 的單位為 m/s， δ 的單位 m。因為轎車碰撞後，車頭塑性變形有時並不是均勻的，若碰撞塑性變形形式為圖 3 之斜線部份[8]，則變形有效深度，對圖 3(a)為

$$\delta = \frac{\delta_1 + \delta_2}{2} \quad (20)$$

對圖 3(b)則為

$$\delta = \frac{y}{y_0} \left(\frac{\delta_1 + \delta_2}{2} \right) \quad (21)$$

式中 y_0 為車寬， y 為碰撞區域寬度， δ_1 和 δ_2 分別為變形區邊緣之塑性變形深度。

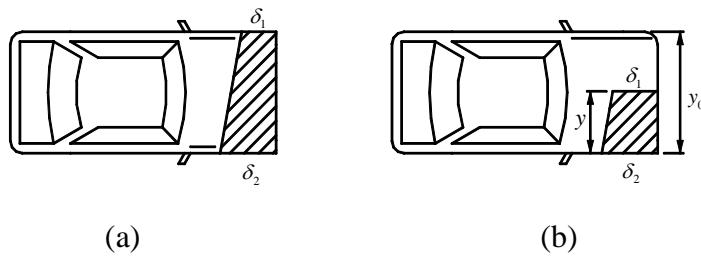


圖 3 碰撞塑性變形深度之計算

四、用反推法求碰撞開始速度

從事故現場所留下的煞車痕跡或散落物掉落情形，可先算出碰撞結束速度，再用汽車的塑性變形可反推得到碰撞開始速度，其流程圖如圖 4 所示，其步驟如下：

- (A) 由滑行距離 s_A 與 s_B 求得碰撞後之速度 v_A 及 v_B (見方程(15))
- (B) 利用塑性變形深度 δ_A 和 δ_B 求汽車有效碰撞速度 v_{eA} 及 v_{eB} [8-9]：

$$v_{eA} = 29.25\delta_A \quad (22)$$

$$v_{eB} = 29.25\delta_B \quad (23)$$

- (C) 利用動量守恆公式(1)及有效速度公式(17)或(18)聯立求解碰撞開始速度 v_{A_0} 及 v_{B_0} 。

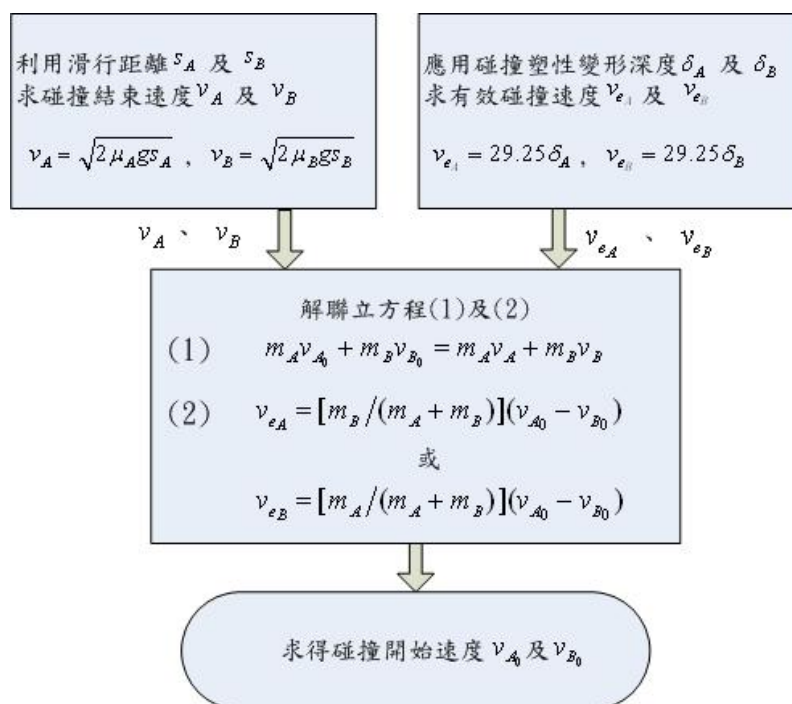


圖 4 用碰撞後滑行距離與塑性變形深度求正面碰撞前速度之流程圖

3.2 尾部追撞

汽車尾部追撞性質和正面碰撞很相似，所以正面碰撞使用的計算方程也適用於尾部追撞，不同的是汽車的尾部剛性較小，故尾部追撞的變形，主要發生在被追撞車的尾部。此時在求被追撞車之有效碰撞速度及塑性變形量時，須改用下列經驗公式[8-9]。

$$v_{eB} = 4.97 \frac{2m_A}{m_A + m_B} \delta_B + 1.28 \quad (24)$$

式中 v_{eB} ：被撞車 B 之有效碰撞速度 (m/s)

δ_B ：被撞車 B 的塑性變形深度 (m)

m_A ：追撞車 A 的質量 (kg)

m_B ：被撞車 B 的質量 (kg)

當追撞車駕駛發現有追撞可能時，通常會緊急煞車，而被追撞車駕駛通常來不及煞車。此時碰撞後兩車之動能由追撞車的輪胎與地面之摩擦來消耗，根據功能原理我們有

$$\frac{1}{2}(m_A + m_B)v_c^2 = v_A m_A g s_A \quad (25)$$

由方程(25)可得兩車碰撞後之共同車速 v_c ：

$$v_c = \sqrt{2\mu_A m_A g s_A / (m_A + m_B)} \quad (26)$$

式中 μ_A ：追撞車（A 車）輪胎與地面之摩擦係數

s_A ：追撞車滑行距離

將(24)式代入(18)式，(26)式代入方程(15)，可求得碰撞開始車速，其流程圖如圖 5 所示。

若是被追撞車緊急煞車造成後車的追撞，此時之能量由兩車消耗，即

$$\frac{1}{2}(m_A + m_B)v_c^2 = \mu_A m_A g s_A + \mu_B m_B g s_B$$

可得共同車速

$$v_c = \sqrt{2(\mu_A m_A g s_A + \mu_B m_B g s_B) / (m_A + m_B)} \quad (27)$$

將(24)式代入(18)式及(27)式代入方程(15)，即可求得碰撞開始車速。

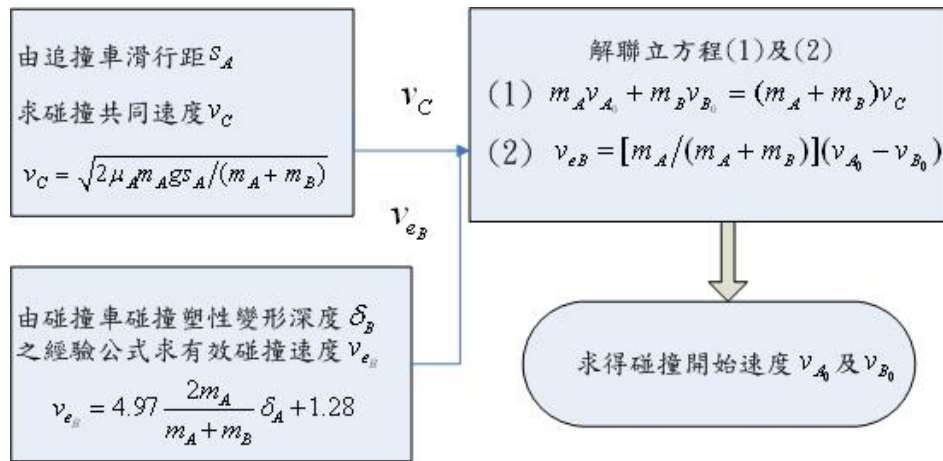


圖 5 尾部追撞求碰撞開始車速之流程圖

肆、汽車二維碰撞之圖解法

4.1 理論基礎

應用動量原理於汽車碰撞，得

$$m_A (\underline{v}_A - \underline{v}_{A_0}) = \underline{P} \quad (28)$$

$$m_B (\underline{v}_B - \underline{v}_{B_0}) = -\underline{P} \quad (29)$$

式中 m_A, m_B 分別為 A、B 兩車的質量； $\underline{v}_{A_0}, \underline{v}_A, \underline{v}_{B_0}, \underline{v}_B$ 分別為 A、B 兩車碰撞開始及結束的車速； \underline{P} 為 A、B 兩車碰撞所產生的合衝量。

將(28)和(29)式相加，得

$$m_A \underline{v}_{A_0} + m_B \underline{v}_{B_0} = m_A \underline{v}_A + m_B \underline{v}_B \quad (30)$$

令動量 \underline{L} ：

$$\vec{L} = m\vec{v} \quad (31)$$

利用(31)式之定義，可將方程(30)寫成

$$\vec{L}_{A_0} + \vec{L}_{B_0} = \vec{L}_A + \vec{L}_B \quad (32)$$

其中 $\vec{L}_A, \vec{L}_B, \vec{L}_{A_0}, \vec{L}_{B_0}$ 分別為 A、B 兩車碰撞結束及碰撞開始之動量。方程(32)為用作圖法推算碰撞開始動量或速度的理論基礎[9-10]。將(32)式之四個向量(動量)依比例尺做成動量四邊形，可求得碰撞開始時汽車的動量，再除以汽車質量便得到碰撞開始車速。對於交通事故而言，通常兩輛車碰撞前後瞬間的運動方向，可從事故現場勘測或者從事故現場草圖得知，如圖 6 所示[9-11]。

4.2 圖解法之使用步驟

圖解法的步驟大致如下：

一、求碰撞結束兩車之車速 v_A, v_B

汽車碰撞結束瞬間其速度之大小 v_A, v_B 可應用功能原理解得，如方程(15)所示。

二、求碰撞結束兩車之動量大小

$$L_A = m_A v_A$$

$$L_B = m_B v_B$$

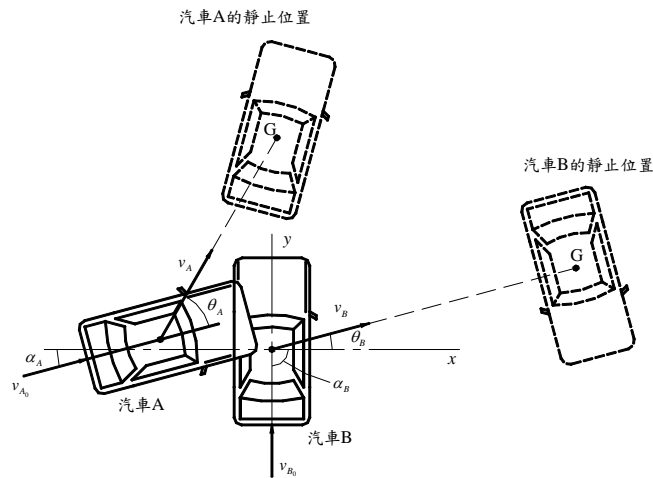


圖 6 事故現場草圖

三、將已知及測得之參數列表，如表 1 所示。表 1 所示為某兩輛汽車碰撞前後的一些參數。

表 1 汽車碰撞參數列表

參數	A 車	B 車
質量 $m(\text{kg})$	1450	1000
碰撞開始速度之碰撞角 $\alpha(^{\circ})$	15°	90°
碰撞結束速度之碰撞角 $\theta(^{\circ})$	60°	16°
車滑行離 (m)	6.32	9.38
摩擦係數 μ	0.6	0.6
碰撞結束車速 $v(\text{m/s})$	8.62	10.5
碰撞結束時車之動量 $L(\text{kg}\cdot\text{m/s})$	12,500	10,500

四、運用動量四邊形圖解法求碰撞前之車速

方程(32)表示 $\vec{L}_A, \vec{L}_B, \vec{L}_{A_0}, \vec{L}_{B_0}$ 四個向量組成一個封閉動量四邊形，其作圖之過程如下：

- (一) 定義動量比例尺，先在平面定 xy 座標系，其原點為 A 。由 A 點出發做線段 $\overline{AB} = \vec{L}_A$ 並與 x 軸成 θ_A 角，代表 A 車碰撞結束動量 \vec{L}_A ，如圖 7 所示。
- (二) 由 B 點出發做線段 $\overline{BC} = \vec{L}_B$ 並與 x 軸成 θ_B 角，代表 B 車碰撞結束動量 \vec{L}_B 。
- (三) 從 C 點出發作線與 x 軸成 α_B 角，代表 B 車碰撞開始動量 \vec{L}_{B_0} 之方向。
- (四) 從 A 點作線與 x 軸成 α_A 角，代表 A 車碰撞開始動量 \vec{L}_{A_0} 的方向，這條線與步驟 (c) 所作之線交於 D 點，則 $\overline{AD} = \vec{L}_{A_0}$ 、 $\overline{DC} = \vec{L}_{B_0}$ ，分別代表 A 、 B 兩車碰撞開始動量。測量 \overline{AD} 和 \overline{DC} 長度，依比例尺可算出碰撞開始動量，再除以質量便是碰撞開始車速。

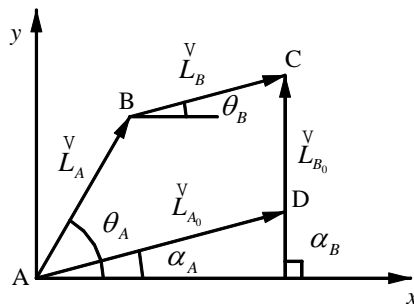


圖 7 動量四邊形

伍、例題

例題 1. A 車質量 1200 kg，往右前進， B 車質量 1000 kg，向左行駛。假設 A 、 B 兩車發生正面碰撞，恢復係數為 0.1，求兩車碰撞後 A 車彈回 0.25 m、 B 車彈回 0.3 m，設 A 、 B 兩車輪胎與路面之摩擦係數為 0.6，求 A 、 B 兩車碰撞時之速度？

解：取方向向右為正，由題意知

$$m_A = 1200 \text{ kg}, m_B = 1000 \text{ kg}, s_A = 0.25 \text{ m}, s_B = 0.3 \text{ m}, e = 0.1, \mu_A = \mu_B = 0.6$$

由滑行距離求碰撞結束速度：

$$v_A = \sqrt{2\mu_A g s_A} = \sqrt{2 \times 0.6 \times 9.8 \times 0.25} = 1.71 \text{ m/s} \quad (\text{向左}) = -1.71 \text{ m/s}$$
$$v_B = \sqrt{2\mu_B g s_B} = \sqrt{2 \times 0.6 \times 9.8 \times 0.3} = 1.88 \text{ m/s}$$

代入方程(5)和(6)，解得 A 、 B 兩車碰撞開始速度

$$v_{A_0} = \frac{1200 \times (-1.71) + 1000 \times 1.88}{1200 + 1000} - \frac{1000}{1200 + 1000} \times \frac{(-1.71 - 1.88)}{0.1} = 16.24 \text{ m/s}$$
$$= 58.46 \text{ km/h}$$

$$v_{B_0} = \frac{1200 \times (-1.71) + 1000 \times 1.88}{1200 + 1000} + \frac{1200}{1200 + 1000} \times \frac{(-1.71 - 1.88)}{0.1} = -19.66 \text{ m/s}$$
$$= -70.78 \text{ km/h}$$

即碰撞開始時 A 車以 58.46 km/h 速度向右運動， B 車以 70.78 km/h 速度向左運動。

例題 2. 汽車 A 和 B 發生正面碰撞，碰撞後沿 A 車前進方向滑行 3.5 m， B 車滑行 4 m。 A 車重 1200 kgf， B 車重 1100 kgf。路面摩擦係數為 0.6，塑性變形深度 A 車 0.4 m， B 車 0.45 m，求兩車碰撞開始速度。

解：已知 $s_A = 3.5 \text{ m}$ ， $s_B = 4 \text{ m}$ ， $m_A = 1200 \text{ kg}$ ， $m_B = 1100 \text{ kg}$

$$\delta_A = 0.4 \text{ m}, \delta_B = 0.35 \text{ m}, \mu_A = 0.6, \mu_B = 0.6$$

一、由滑行距離求碰撞結束速度：

$$v_A = \sqrt{2\mu_A g s_A} = \sqrt{2 \times 0.6 \times 9.8 \times 3.5} = 6.42 \text{ m/s}$$
$$v_B = \sqrt{2\mu_B g s_B} = \sqrt{2 \times 0.6 \times 9.8 \times 4} = 6.86 \text{ m/s}$$

二、求有效碰撞速度

$$v_{eA} = 29.25 \delta_A = 29.25 \times 0.4 = 11.7 \text{ m/s}$$

三、代入動量守恆公式(1)及有效碰撞速度公式(17)，得

$$1200v_{A_0} + 1100v_{B_0} = 1200 \times 6.42 + 1100 \times 6.86 \quad (\text{a})$$

$$11.7 = [1100/(1200 + 1100)](v_{A_0} - v_{B_0}) \quad (\text{b})$$

從(a)及(b)解得兩車碰撞開始速度

$$v_{A_0} = 18.33 \text{ m/s} = 65.99 \text{ km/h}$$

$$v_{B_0} = -6.13 \text{ m/s} = -22.07 \text{ km/h}$$

同理，可用 B 車的變形量與有效碰撞速度關係式(23)，求得 B 車有效碰撞速度

$$v_{eB} = 29.25\delta_B = 29.25 \times 0.45 = 13.16 \text{ m/s}$$

代入有效速度公式(18)，得

$$13.16 = [1200/(1200+1100)][v_{A_0} - v_{B_0}] \quad (c)$$

聯立解(b)及(c)，可得

$$v_{A_0} = 18.70 \text{ m/s} = 67.32 \text{ km/h}$$

$$v_{B_0} = -6.53 \text{ m/s} = -23.51 \text{ km/h}$$

從上述分析可知碰撞開始 A 車的速度為

$$v_{A_0} = 65.99 \sim 67.32 \text{ km/h}$$

B 車的速度為

$$v_{B_0} = 22.07 \sim 23.51 \text{ km/h}$$

例題 3. A 車重 1300kgf 尾部追撞 B 車後滑行 7m， B 車重 1000kgf，尾部被撞後塑性變形深度 0.5m，假設 B 車被撞時沒有踩煞車，但後輪被撞壞而後輪有滑動痕跡 12m，路面與輪胎的摩擦係數 0.6，求兩車碰撞開始速度？

解：依題意已知下列數據

$$m_A = 1300 \text{ kg}, m_B = 1000 \text{ kg}, s_A = 7 \text{ m}, s_B = 12 \text{ m}, \mu_A = 0.6, \delta_B = 0.5$$

由滑行距離求碰撞結束車速

$$v_A = \sqrt{2\mu_A g s_A} = \sqrt{2 \times 0.6 \times 9.8 \times 7} = 9.07 \text{ m/s} = 32.65 \text{ km/h}$$

計算時須注意到輪胎與地面的摩擦係數為 0.6，但 B 車只有兩後輪因損壞而滑動，故其等效摩擦係數 $\mu_B = 0.6 \times 2/4 = 0.3$

$$v_B = \sqrt{2\mu_B g s_B} = \sqrt{2 \times 0.3 \times 9.8 \times 12} = 8.4 \text{ m/s} = 30.24 \text{ km/h}$$

v_A, v_B 可作為碰撞後共同速度 v_c 的範圍。令 $v_c = 9.07 \text{ m/s}$ 代入(15)式得

$$1300v_{A_0} + 1000v_{B_0} = (1300+1000) \times 9.07 \quad (d)$$

再令 $v_c = 8.4 \text{ m/s}$ 代入(15)式得

$$1300v_{A_0} + 1000v_{B_0} = (1300+1000) \times 8.4 \quad (e)$$

再依據被撞車塑性變形深度及經驗公式(25)，計算有效碰撞速度

$$v_{eB} = 4.97 \times \frac{2 \times 1300}{1300 + 1000} \times 0.5 + 1.28 = 4.09 \text{ m/s}$$

再代入公式(18)，得

$$4.09 = \frac{1300}{1300 + 1000} (v_{A_0} - v_{B_0}) \quad (f)$$

聯立解方程(d)和(f)，得

$$v_{A_0} = 12.22 \text{ m/s} = 43.99 \text{ km/h}$$

$$v_{B_0} = 4.98 \text{ m/s} = 17.93 \text{ km/h}$$

聯立解方程(e)和(f)，得

$$v_{A_0} = 11.55 \text{ m/s} = 41.58 \text{ km/h}$$

$$v_{B_0} = 4.31 \text{ m/s} = 15.52 \text{ km/h}$$

所以從上述之分析可知 A、B 兩車碰撞開使之車速的範圍為

$$v_{A_0} = 41.58 : 43.99 \text{ km/h}$$

$$v_{B_0} = 15.52 : 17.93 \text{ km/h}$$

例題 4. 以表 1 所示之汽車碰撞參數，用圖解法求 A、B 兩車碰撞開使之車速。

解：如圖 7 所示，定義動量比例尺 $1\text{mm} = 500\text{kg} \cdot \text{m/s}$ ，因 A 車碰撞後的動量等於 $12500\text{kg} \cdot \text{m/s}$ ，故在圖 7 上從 A 點出發，畫 A 車碰撞結束動量大小 L_A 等於 $12500/500 = 25\text{mm}$ ，方向角 $\theta_A = 60^\circ$ 至 B 點，則 $\overline{AB} = L_A$ 。再從 B 點出發，畫 BC 長度等於 $10500/500 = 21\text{mm}$ ，角度 $\theta_B = 16^\circ$ 代表 $\overline{BC} = L_B$ 。接著從 C 點做線垂直 x 軸，代表 B 車碰撞開始動量的方向，再從 A 點做線與水平線成 $\alpha_A = 15^\circ$ ，代表 A 車碰撞開始動量的方向。兩條線交於 D 點，則 $\overline{AD} = L_{A_0}$ 代表 A 車碰撞開始動量， $\overline{DC} = L_{B_0}$ 代表 B 車碰撞開始動量。用尺精確地量出 \overline{AD} 長度為 34mm ，所以 A 車碰撞開始動量的大小 $L_{A_0} = 34 \times 500 = 17000\text{kg} \cdot \text{m/s}$ ，用尺精確地量出 \overline{DC} 長度為 18mm ，所以 B 車碰撞開始動量的大小 $L_{B_0} = 18 \times 500 = 9000\text{kg} \cdot \text{m/s}$ ，故 A、B 兩車碰撞開始速度為

$$v_{A_0} = \frac{L_{A_0}}{m_A} = \frac{17000}{1450} = 11.72 \text{ m/s} = 42.2 \text{ km/h}$$

$$v_{B_0} = \frac{L_{B_0}}{m_B} = \frac{9000}{1000} = 9 \text{ m/s} = 32.4 \text{ km/h}$$

陸、結論

本文運用動力學的方法於行車事故汽車碰撞的研究，簡介如何運用(1)動量守恆定律以及恢復係數；(2)動量守恆定律及變形深度，於汽車一維碰撞。(3)對於汽車二維碰撞則採用圖解法，這三種方法配合汽車碰撞後的煞車痕跡和功能原理來反向計算得到汽車碰撞開始車速。對第一種方法之恢復係數之值較不易準確判斷；對於第二種方法之有效速度與變形深度之間的關係公式有待大量實驗數據之驗證。雖然這三種方法也許沒有商業專用軟體精確，但其使用步驟簡單快速，可作為一般鑑定人員之參考。

致謝

本文承交通部經費補助，計畫編號 MOTC-NCKU-9304，特此致謝。

參考文獻

1. Brach, R. M., *Mechanical Impact Dynamics: Rigid body Collisions*, John Wiley and Sons, 1991.
2. Ishikawa, H., "Impact Model for Accident Reconstruction—Normal and Tangential Restitution Coefficients", SAE 930654, 1993.
3. Brach, Raymond M. and R. Matthew Brach, "A Review of Impact Models for Vehicle Collision", SAE 870048, 1987.
4. McHenry, B. G. and R. R. McHenry, "SMAC-97 Refinement of the Collision Algorithm", SAE 970947, 1997.
5. 實車碰撞檢測技術研討會論文集，車輛研究測試中心，2002。
6. Beer, F. P. and E. R. Johnston, *Vector Mechanics for Engineers: Dynamics*, 3rd SI Metric ed., McGraw-Hill, 1999.
7. Hibbeler, R. C., *Engineering Mechanics: Dynamics*, 8nd ed., Prentice-Hall, 1998.
8. 陳如娜，"車輛碰撞過程的速度分析"，長春理工大學學報，第 26 卷，第 1 期，頁 78-80，2003。
9. 崔海梁、王忠義、吳社強、許力，"汽車碰撞事故的速度分析"，長安大學學報（自然科學版），第 23 卷，第 1 期，頁 84-86，2003。
10. 許洪國、王雲鵬、李三紅，"推算汽車碰撞速度的兩種圖解法"，汽車工程，第 18 卷，第 5 期，頁 297-300，1996。
11. 張漢威，車輛肇事鑑定之研究，1998。