

汽車二維碰撞車速推估模型之探討

張超群¹ 許哲嘉² 黃國平³

摘要

汽車二維平面碰撞車速推估的計算方法有動量法和能量法。動量法有點質量模型，一般模型，本文並提出並建立一種不必用恢復係數的簡易模型；而能量法則採用車損能量推估車速。本文將探討上述各種模型的使用時機，並對動量法的車速推估公式作詳細推導。而對能量法我們提出了用餘弦定律反推撞前車速之方法。最後我們比較了動量法與能量法的優缺點。本文可作為交通事故鑑定人員碰撞車速推估及責任認定之參考。

關鍵詞：汽車二維碰撞、動量法、能量法、簡易模型、點質量模型

壹、前言

隨著生活水準的提高，汽車的數目急速增加，發生汽車碰撞的交通事故也隨之增多。汽車的碰撞若不發生翻滾現象，皆可視為二維碰撞，如常見的偏心直線碰撞、斜碰撞、垂直碰撞等就屬二維碰撞，而一維碰撞可視為二維碰撞之特例。在交通事故鑑定中，車速是判斷責任歸屬的一個重要依據。因此，如何較正確地估算碰撞車速，讓肇事者心服便成為重要的課題。在交通事故重建中對車速推估通常採用動量法或能量法。動量法應用車輛碰撞前後動量守恆、恢復係數及衝量比等參數，再配合肇事現場留下的跡證，如煞車痕長度，散落物等便可求出碰撞前後車速。能量法則採用車輛碰撞後的車損變形量，輔以車輛的勁度係數，算出車體碰撞的車損能量，求出碰撞過程的速度變化。對車速的推估可應用經驗法及依能量法和動量法開發的商業軟體如CRASH3、PC-CRASH、IMPAC、SMAC [1-4]等。用商業軟體雖然計算較精準，然而這些軟體需要有相關專業背景或受過訓練的人才會使用，並且價格昂貴，非一般鑑定單位買得起的；用經驗法推估車速則可能

¹南台科技大學機械工程系副教授

²南台科技大學機械工程系副教授

³國立成功大學交通管理科學系副教授

產生較大的誤差。有鑒於此，本研究應用動力學的動量法和能量法進行汽車二維碰撞的車速推估，並用Excel編寫成程式，具有使用簡單，又有一定的精確度之優點。

雖然文獻中已有許多二維碰撞模型探討[5-12]，但其推導過程相當簡略，一般人不了解如何導出公式，且其使用時機未說明很詳細。本文對汽車二維碰撞動量法模型已有的點質量模型及一般碰撞模型的车速推估公式作詳細推導，並提出簡易模型及說明車速推估正推法和反推法的大致進行步驟。此外我們也介紹能量法作車速推估的使用步驟。而一般能量法只計算出碰撞期間的速度變化 ΔV ，本文則提出利用餘弦定律反推碰撞前車速的方法。最後我們說比較了動量法與能量法的優缺點。

貳、汽車二維碰撞的動量法模型

當兩部車碰撞時，其速度方向與兩車重心連線不在同一直線時（也就是非對心碰撞時），汽車碰撞時有可能產生迴轉或側滑的平面運動，這種碰撞稱為汽車二維碰撞。汽車二維碰撞，描述車的位置可用兩個直角座標及一個轉角來描述，因此每部車具有3個自由度。通常有採用沿水平和垂直方向的 xy 座標系或沿切線和法線的 $t-n$ 座標系來描述汽車二維碰撞。汽車二維碰撞依兩車行進方向，大致可分為偏心正面碰撞、垂直碰撞、斜碰撞等。汽車二維碰撞的研究方法有動量法和能量法。動量法[5-12]應用動量守恆定律配合恢復係數及衝量比等定義推導出碰撞過程的速度變化；能量法[12-17]則量測碰撞後的變形深度，再應用車輛的剛度係數求出車損能量，進而求出碰撞的速度變化。本節將探討動量法的簡易模型、點質量模型及一般模型。

2.1 基本假設

汽車二維碰撞二維碰撞動量法的基本假設有：

- (1)碰撞期間一些外力如重力、輪胎力等和碰撞力相比小很多可忽略不計，因此在碰撞過程中動量守恆。
- (2)碰撞前後車輛的質量、重心、質量慣性矩保持不變。
- (3)碰撞的合衝量作用在碰撞中心。

2.2 簡易模型

簡易模型的基本假設除滿足前述的基本假設外，還忽略了汽車變形，因此汽車簡化為剛體，再加上不計較轉動效應，汽車進一步簡化為質點，最後忽略了切線方向的摩擦，讓分析簡化，適合於作碰撞的初步分析。

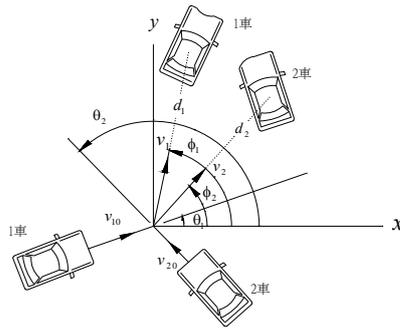


圖 1 汽車二維碰撞簡易模型示意圖

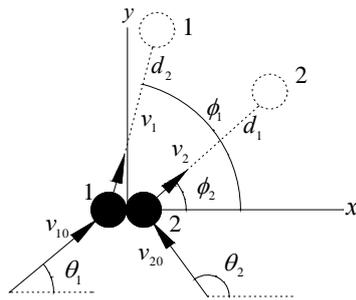


圖 2 汽車二維碰撞簡易模型

圖 1 所示為兩車碰撞的示意圖，不計車輛的變形、旋轉運動及切線方向的摩擦，1 車及 2 車可視為質點 1 和 2，如圖 2 所示。根據動量守恆定律，碰撞前後動量守恆，即

$$m_1 \mathbf{v}_{10} + m_2 \mathbf{v}_{20} = m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2 \quad (1)$$

式中 m_1 和 m_2 為 1、2 車的質量； \mathbf{v}_{10} 和 \mathbf{v}_{20} 為 1、2 車碰撞前速度； \mathbf{v}_1 和 \mathbf{v}_2 為 1、2 車碰撞後車速。將上式投影到 x, y 方向，可得兩個純量方程。在 x 方向為

$$m_1 v_{10} \cos \theta_1 + m_2 v_{20} \cos \theta_2 = m_1 v_1 \cos \phi_1 + m_2 v_2 \cos \phi_2 \quad (2)$$

而在 y 方向為

$$m_1 v_{10} \sin \theta_1 + m_2 v_{20} \sin \theta_2 = m_1 v_1 \sin \phi_1 + m_2 v_2 \sin \phi_2 \quad (3)$$

式中 θ_1 和 θ_2 為 1、2 車碰撞前與正 x 軸的夾角稱為接近角 (approach angle)；而 ϕ_1 和 ϕ_2 為 1、2 車碰撞後正 x 軸的夾角稱為離去角 (departure angle)。在 (2)、(3) 兩式中，我們假設碰撞前兩車的行駛方向是已知的，即 θ_1 和 θ_2 是確定的。另一個假設是碰

撞後的車速 v_1 和 v_2 可由 1、2 車煞車滑動距離 d_1 和 d_2 計算，即

$$v_1 = \sqrt{2ugd_1} \quad , \quad v_2 = \sqrt{2ugd_2} \quad (4)$$

由方程(2)、(3)、(4)式，可解得碰撞前車速 v_{10} 、 v_{20} 如下：

$$\begin{bmatrix} v_{10} \\ v_{20} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_1 \cos \theta_1 & m_2 \cos \theta_2 \\ m_1 \sin \theta_1 & m_2 \sin \theta_2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} m_1 \cos \phi_1 + m_2 v_2 \cos \phi_2 \\ m_1 \sin \phi_1 + m_2 v_2 \sin \phi_2 \end{bmatrix} \quad (5)$$

此模型除了簡單外，還有不需使用恢復係數之優點。但此模型未考慮到切線方向的摩擦，故只適於作車速的初步推估。

2.3 點質量模型

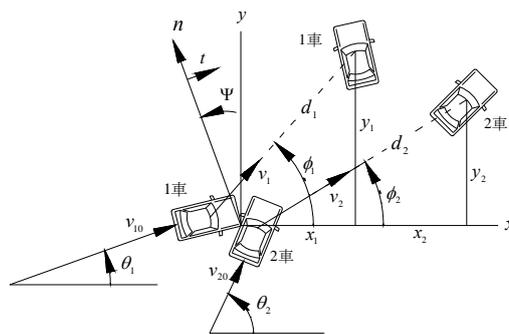


圖 3 汽車二維碰撞點質量模型示意圖

點質量模型(point mass model)[5]忽略兩部汽車碰撞後的旋轉運動，點質量模型與簡易模型相比多考慮了碰撞切線方向的摩擦，為此需用到切線與法線座標、恢復係數、衝量比，如圖 3 所示。其模型如圖 4 所示。

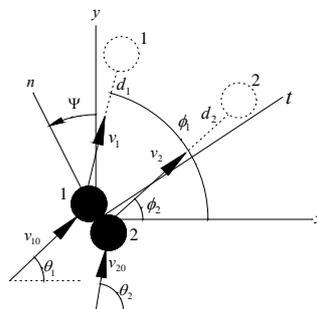


圖 4 點質量模型

設 1、2 車碰撞前車速 \mathbf{V}_{10} 和 \mathbf{V}_{20} 在法線方向的分量分別為 v_{10}^n 、 v_{20}^n ；在切線方向

的分量分別為 v'_{10} 、 v'_{20} 。1、2 車碰撞後車速 \mathbf{V}_1 和 \mathbf{V}_2 在法線方向的分量分別為 v_1^n 、 v_2^n ；

在切線方向的分量分別為 v_1^t 、 v_2^t 。應用衝量與動量原理於 1、2 車法線與、切線方向，得

$$m_1 v_{10}^n + P_n = m_1 v_1^n \quad (6)$$

$$m_1 v_{10}^t + P_t = m_1 v_1^t \quad (7)$$

$$m_2 v_{20}^n - P_n = m_2 v_2^n \quad (8)$$

$$m_2 v_{20}^t - P_t = m_2 v_2^t \quad (9)$$

式中 P_n 為碰撞處的法向衝量， P_t 為切向衝量。由恢復係數的定義得

$$e = -\frac{v_1^n - v_2^n}{v_{10}^n - v_{20}^n} \quad (10)$$

定義衝量比(impulse ratio) η ：

$$\eta = \frac{P_t}{P_n} \quad (11)$$

由 (6)、(8) 式可得

$$v_1^n = v_{10}^n + P_n / m_1 \quad (12)$$

$$v_2^n = v_{20}^n - P_n / m_2 \quad (13)$$

方程(12)、(13)代入方程(10)整理後，可得法向衝量

$$P_n = \bar{m}(1+e)(v_{20}^n - v_{10}^n) \quad (14)$$

其中

$$\bar{m} = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \quad (15)$$

將(14)式代入(12)、(13)、(7)、(9)式可解得正推法所用之碰撞後速度計算式如下：

$$v_1^n = v_{10}^n + \bar{m}(1+e)(v_{20}^n - v_{10}^n) / m_1 \quad (16)$$

$$v_1^t = v_{10}^t + \eta \bar{m}(1+e)(v_{20}^n - v_{10}^n) / m_1 \quad (17)$$

$$v_2^n = v_{20}^n - \bar{m}(1+e)(v_{20}^n - v_{10}^n) / m_2 \quad (18)$$

$$v_2^t = v_{20}^t - \eta \bar{m}(1+e)(v_{20}^n - v_{10}^n) / m_2 \quad (19)$$

同理，可用反推法解得的碰撞前速度計算式如下：

$$v_{10}^n = v_1^n + \frac{(1+e)\bar{m}}{m_1 e} (v_2^n - v_1^n) \quad (20)$$

$$v_{10}^t = v_1^t + \frac{(1+e)\eta\bar{m}}{m_1 e} (v_2^n - v_1^n) \quad (21)$$

$$v_{20}^n = v_2^n - \frac{(1+e)\bar{m}}{m_2 e} (v_2^n - v_1^n) \quad (22)$$

$$v_{20}^t = v_2^t - \frac{(1+e)\eta\bar{m}}{m_2 e} (v_2^n - v_1^n) \quad (23)$$

在選擇 η 之值時須小於臨界衝量比 η_0 [5] 才不會違反能量定理。臨界衝量比的值與相對速度大小有關，其值為

$$\eta_0 = \frac{r}{1+e} \quad (24)$$

其中

$$r = \frac{v_{20}^t - v_{10}^t}{v_{20}^n - v_{10}^n} \quad (25)$$

2.4 一般模型

汽車二維碰撞的一般模型[9]，如圖 5 所示。如果兩車碰撞時接觸面積很大，此時可應用碰撞中心的概念，將作用於碰撞面的碰撞分佈力之合力等效作用在碰撞中心上的。在整個碰撞過程中，汽車之間接觸面的碰撞力對碰撞時間的積分等效於一個等效衝量，此等效衝量的作用點稱為碰撞中心(impact center)[9]。碰撞中心在 O 點，以 O 點為座標原點；沿著碰撞面的法線及切線作法線座標 n 及切線座標 t ，

並將 1、2 兩車的車速 \mathbf{v}_1 、 \mathbf{v}_2 沿 $t-n$ 軸分解成 v_1^t 、 v_1^n 及 v_2^t 、 v_2^n 。1、2 兩車的重心

G_A 、 G_B 座標分別為 (a_1, b_1) 及 (a_2, b_2) 。畫出 1、2 兩車的衝量圖，如圖 6 所示，其

中 P_n 、 P_t 為碰撞產生之合衝量在法線及切線之分量。

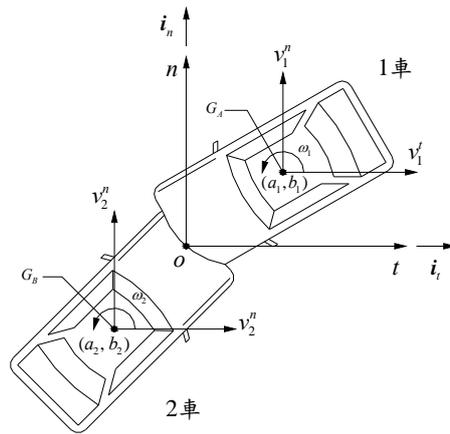


圖 5 汽車二維碰撞之座標系

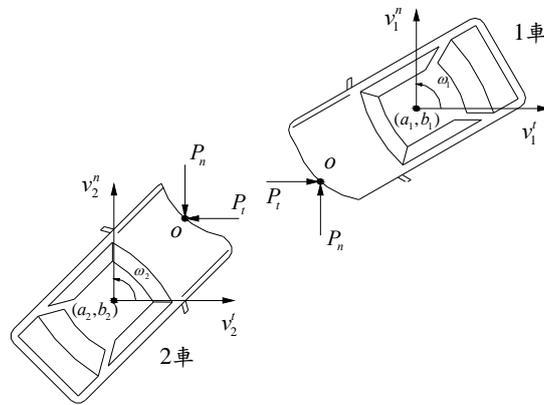


圖 6 1 車與 2 車的衝量圖

1 車在碰撞法線及切線方向的分量為

$$v_{10}' = v_{10} \cos \theta_1 \quad (26)$$

$$v_{10}'' = v_{10} \sin \theta_1 \quad (27)$$

2 車在法線及切線方向之分量為

$$v_{20}' = v_{20} \cos \theta_2 \quad (28)$$

$$v_{20}'' = v_{20} \sin \theta_2 \quad (29)$$

其中 θ_1 和 θ_2 為 1、2 車的速度與 t 軸正方向的夾角，設切線方向的衝量為 P_t ，

法線方向的衝量 P_n ，並設 1、2 車繞 Z 軸的橫擺運動(yaw motion)的質心慣性矩(轉動

慣量)分別為 $J_1 = m_1 k_1^2$ 及 $J_2 = m_2 k_2^2$ ，其中 k_1 和 k_2 分別為 1 車和 2 車的迴轉半徑

(radius of gyration)，則應用衝量與動量原理於法線、切線及 Z 軸方向，對 1 車可得

$$m_1 v_{10}^n + P_n = m_1 v_1^n \quad (30)$$

$$m_1 v_{10}^t + P_t = m_1 v_1^t \quad (31)$$

$$m_1 k_1^2 \omega_{10} - P_n a_1 + P_t b_1 = m_1 k_1^2 \omega_1 \quad (32)$$

對 2 車可得

$$m_2 v_{20}^n - P_n = m_2 v_2^n \quad (33)$$

$$m_2 v_{20}^t - P_t = m_2 v_2^t \quad (34)$$

$$m_2 k_2^2 \omega_{20} + P_n a_2 - P_t b_2 = m_2 k_2^2 \omega_2$$

(35)

1、2 車碰撞中心在碰撞開始(時刻 t_0)和碰撞結束(時刻 t_1)法線方向的接近速度分別為

$$v_{ap}^n(t_0) = v_{20}^n - a_2 \omega_{20} - v_{10}^n + a_1 \omega_{10} \quad (36)$$

$$v_{ap}^n(t_1) = v_2^n - a_2 \omega_2 - v_1^n + a_1 \omega_1 \quad (37)$$

碰撞開始(時刻 t_0)與碰撞結束(時刻 t_1)，法向接近速度 v_{ap} 之關係為

$$v_{ap}^n(t_1) = -e v_{ap}^n(t_0) \quad (38)$$

其中 e 為恢復係數。令切線方向與法線方向的衝量比 η 與方程(11)相同：利用(30)至(35)式及方程(11)，可得 1 車碰撞結束時的速度和角速度：

$$v_1^n = v_{10}^n + P_n / m_1 \quad (39)$$

$$v_1^t = v_{10}^t + \eta P_n / m_1 \quad (40)$$

$$\omega_1 = \omega_{10} - \frac{a_1 - \eta b_1}{m_1 k_1^2} P_n \quad (41)$$

及 2 車碰撞結束時的速度和角速度：

$$v_2^n = v_{20}^n - P_n / m_2 \quad (42)$$

$$v_2^t = v_{20}^t - \eta P_n / m_2 \quad (43)$$

$$\omega_2 = \omega_{20} + \frac{a_2 - \eta b_2}{m_2 k_2^2} P_n \quad (44)$$

將(36)、(41)、(42)、(44)式代入(38)式，整理後得

$$v_{ap}(t_0) - P_n \left[\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} + \frac{a_1^2}{m_1 k_1^2} + \frac{a_2^2}{m_2 k_2^2} \right) - \eta \left(\frac{a_1 b_1}{m_1 k_1^2} + \frac{a_2 b_2}{m_2 k_2^2} \right) \right] = -e v_{ap}^n(t_0) \quad (45)$$

令

$$q = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} + \frac{a_1^2}{m_1 k_1^2} + \frac{a_2^2}{m_2 k_2^2} \quad (46)$$

$$z = \frac{a_1 b_1}{m_1 k_1^2} + \frac{a_2 b_2}{m_2 k_2^2} \quad (47)$$

將(45)、(46)式代入(44)式，得

$$v_{ap}(t_0) - P_n(q - \eta z) = -e v_{ap}^n(t_0) \quad (48)$$

即法向碰撞衝量

$$P_n = \frac{1+e}{q - \eta z} v_{ap}(t_0) = \frac{1+e}{q - \eta z} (v_{20}^n - a_2 \omega_{20} - v_{10}^n + a_1 \omega_{10}) \quad (49)$$

將(48)式代入(30)至(35)式，可得1、2車碰撞結束時的速度和角速度。當忽略旋轉效應，方程(46)簡化為方程(15)，而 $z=0$ ，於是方程(49)與方程(14)相同，即一般模型簡化為點質量模型。

一般事故重建步驟車速推估的進行方式可分正推法和反推法。正推法的步驟大致如下：

- (1) 根據跡証，決定碰撞點、碰撞方向、碰撞位置、煞車距離。
- (2) 從碰撞車的車面決定碰撞面方向、碰撞中心之位置，由此可決定質心至碰撞中心。
- (3) 輸入兩車的質量、尺寸及有關數據。
- (4) 決定可能知道的速度量及汽車速度方向，例碰撞前車的角加速度常是零。
- (5) 決定恢復係數 e 及衝量比 η 。
- (6) 利用已知的數據作碰撞分析。
- (7) 改變初始速度直到碰撞後的資訊與實際接近相等。

反推法的步驟前三項與正推法相同，接著便是利用已知煞車痕跡計算出碰撞後車速在反推出碰撞前車速。

用反推法來推估碰撞前車速，可能與實際車速有誤差的原因有下面：

- (1) 碰撞的位置及方向是選定的，這影響到碰撞點的座標及切線和法線座標軸 $t-n$ 軸的方向。
- (2) 恢復係數 e 與衝量比 η 的選取與實際情況相比會有誤差存在。

- (3) 路面摩擦係數的選取會影響到碰撞後的速度及角速度之值的準確度。
- (4) 汽車碰撞時兩車恢復係數 e 通常很小，甚至等於零，此時由公式(20)至(23)可知反推法會產生很大的誤差。

參、汽車二維碰撞能量法模型

能量法[12-17]是用汽車碰撞後的變形深度來計算碰撞車損能量，進而計算出碰撞過程的速度變化 ΔV 。能量法基本假設如下：

- (1) 車損能量等於碰撞能量損失。
- (2) 碰撞為完全塑性碰撞。
- (3) 碰撞車在切線方向的滑動在車分離前便停止。
- (4) 其它非碰撞力忽略不計。

假設(2)和(3)稱為共同車速情況(common-velocity condition)除了低速碰撞及擦撞外，一般共同車速情況是成立的。對汽車二維碰撞能量法的車速推估公式，基本上與汽車一維碰撞能量法類似，只是多了迴轉效應。為計及迴轉效應一般需決定所謂的主碰撞力方向(Principle Direction of Force)PDOF，它一般是根據車體的變形及經驗或碰撞後車的停止位置而判斷的。在使用能量法需用到碰撞車的勁度係數(剛度係數)這些資料需由實驗求得，但因車輛種類繁多，不可能獲得各種車型的勁度係數，因此，一般都採用美國國家高速公路安全管理局(NHTSA)的測試資料[12]。我們將能量法的使用步驟大致說明如下：

- (1) 計算車損變形時通常採用六點量測法，量測碰撞斷面 6 個點的變形深度 c_1 、 $c_2 \sim c_6$ ，計算出平均變形深度 C_{av} ：

$$C_{av} = \frac{c_1 + 2c_2 + 2c_3 + 2c_4 + 2c_5 + c_6}{10} \quad (50)$$

若採用四點量測法，則

$$C_{av} = \frac{c_1 + 2c_2 + 2c_3 + c_4}{6} \quad (51)$$

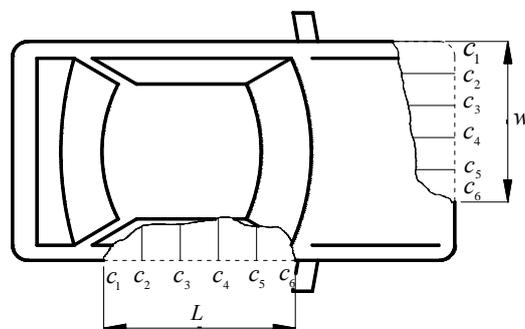


圖 7 車損變形深度的量測

(2)輸入 1、2 車的勁度係數，計算車損能量

$$E_1 = (A_1 C_{1av} + B_1 C_{1av}^2 / 2 + A_1^2 / 2B_1) \times w_1 \quad (52)$$

$$E_2 = (A_2 C_{2av} + B_2 C_{2av}^2 / 2 + A_2^2 / 2B_2) \times w_2 \quad (53)$$

式中 E_1 和 E_2 為 1、2 車的車損能量； C_{1av} 和 C_{2av} 為 1、2 車的平均車損變形深度； w_1 和 w_2 為 1、2 車變形寬度； A_1 、 B_1 、 A_2 、 B_2 為 1、2 車的勁度係數。若考慮 PDOF 與車速方向的不一致，為計及切線方向的车損能量，此時方程(52)、(53)需乘以修正係數 $(1 + \tan^2 \beta)$ [11]， β 為 PDOF 與車速方向的夾角。

(3)計算轉動效應之參數

為了計及轉動效應，根據變形及經驗決定主碰撞力方向(PDOF)，如圖 8 所示。量測 1、2 車重心至主碰撞力方向的垂直距離 h_1 和 h_2 ，得到兩個計及轉動效應的參數

$$\gamma_1 = \frac{k_1^2}{k_1^2 + h_1^2} \quad (54)$$

$$\gamma_2 = \frac{k_2^2}{k_2^2 + h_2^2} \quad (55)$$

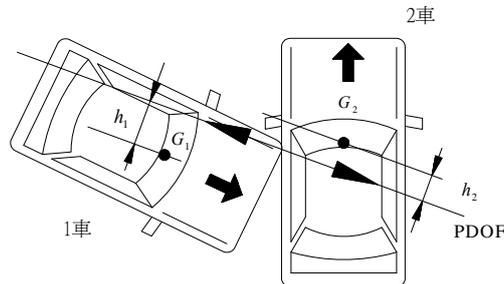


圖 8 主碰撞力方向

(4)計算速度變化

根據車損能量可得碰撞前後 1、2 車的速度變化 ΔV_1 和 ΔV_2 [12、14]。

$$\Delta V_1 = \sqrt{\frac{2\gamma_1\gamma_2 m_2 (E_1 + E_2)}{m_1(\gamma_1 m_1 + \gamma_2 m_2)}} \quad (56)$$

$$\Delta V_2 = \sqrt{\frac{2\gamma_1\gamma_2 m_1 (E_1 + E_2)}{m_2(\gamma_1 m_1 + \gamma_2 m_2)}} \quad (57)$$

一般能量法的車速推估只計算到方程(56)、(57)所示之車速變化。以下為本文提出之反推碰撞前車速之算法。

(5)計算碰撞前車速

根據衝量與動量原理，PDOF 方向與 ΔV 同向，定義 \angle PDOF 的方向為 ΔV 之方向與車頭前進方向之夾角如圖 9 所示。圖中 θ_1 為 1 車碰撞前與水平線的夾角， ϕ_1 為 1 車碰撞後停止位置與水平線的夾角。1、2 車碰撞結束之車速 v_1 和 v_2 由碰撞後滑行距離決定。參考圖 9，由餘弦定律可求得碰撞前 1 車速 v_{10} ：

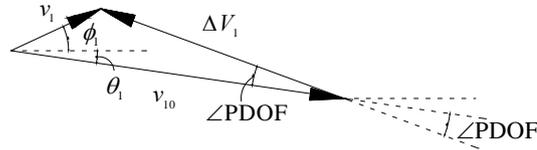


圖 9 計算碰撞前車速

$$v_{10} = \sqrt{v_1^2 + (\Delta V_1)^2 - 2v_1\Delta V_1 \cos(180^\circ - \theta_1 - \phi_1 - \angle\text{PDOF})} \quad (58)$$

同理可求出 2 車碰撞前車速。

肆、討論

本節討論動量法和能量法的優缺點。

4.1 動量法

優點：

- (1)不必決定主碰撞力方向，也不須符合能量法的共同車速情況，就可以用來推估車速，因此對低速碰撞及擦撞也可進行車速推估。
- (2)不必量測車損變形及用得車輛勁度係數，以計算車損能量。
- (3)應用簡易模型時，不需恢復係數。

缺點：

- (1)恢復係數及衝量比(或稱切向恢復係數)之值不易確定，會影響車速推估正確性。
- (2)假設碰撞過程中，質心位置不變也會影響計算結果。
- (3)碰撞點不易確定，會影響碰撞後車速之計算準確度。
- (4)在台灣容易發生汽車碰撞後會繼續碰撞分隔島或水溝等，此時碰撞後的車速不易由滑行距離決定。

4.2 能量法

優點：

- (1)若已知勁度係數，利用車損變形計算之值較正確。
- (2)根據變形來分析碰撞車速通常較具公信力。
- (3)若碰撞後碰撞速度不易由汽車碰撞後的煞車痕跡及其它的物證算出，能量法仍可決定碰撞過程的速度變化 ΔV 。

缺點：

- (1) 能量法主碰撞力的方向不易確定，而動量法則不必決定主碰撞方向。
- (2) 在許多情況下，碰撞並非完全塑性碰撞並且切線方向的能量損失不能忽略，因此在計算 ΔV 時用修正係數來包含切線方向的能量損失。
- (3) 車輛的勁度係數不易正確獲得。

伍、結論

本研究用動量法對汽車二維碰撞的簡化模型、點質量模型和一般模型之車速推估公式做了詳細推導，也用能量法說明了二維碰撞的模型及其使用步驟，並提出用餘弦定律反推碰撞前車速的方法，並比較了各種模型的使用時機。這些汽車碰撞車速推估公式已用Excel編寫成計算程式，使用者可很方便的應用。我們也說明車速推估正推法和反推法的大致步驟。最後我們比較了動量法與能量法的優缺點。本文可作為鑑定人員或警察作肇事鑑定車速推估的參考。

參考文獻

1. Brain G. McHenry and Raymond R. McHenry, "SMAC-97 Refinement of the Collision Algorithm", SAE 970947, 1997.
2. Raymond R. McHenry and Brain G. McHenry, "A Revised Damage Analysis Procedure for the CRASH Computer Program", SAE 861894, 1986.
3. Brain G. McHenry and Raymond R. McHenry, "CRASH-97 Refinement of the Trajectory Solution Procedure", SAE 970949, 1997.
4. R. L. Woolley, "The IMPAC Computer Program for Accident Reconstruction", SAE 850254, 1985.
5. Raymond M. Brach and R. Matthew Brach, *Vehicle Accident Analysis and Reconstruction Methods*, SAE International, 2005.
6. R. M. Brach, *Mechanical Impact Dynamics: Rigid body Collisions*, John Wiley and Sons, 1991.
7. R. H. Macmillan, "Dynamics of Vehicle Collisions", *Proceedings of the International Association for Vehicle Design*, 1983.
8. Raymond M. Brach and R. Matthew Brach, "A Review of Impact Models for Vehicle Collision", SAE 870048, 1987.
9. H. Ishikawa, "Impact Model for Accident Reconstruction: Normal and Tangential Restitution Coefficients", SAE 930654, 1993.
10. Raymond M. Brach and R. Matthew Brach, "Crush Energy and Planar Impact Mechanics for Accident Reconstruction", SAE 980025, 1998.
11. 崔海梁、王忠義、吳社強、許力, "汽車碰撞事故的速度分析", 長安大學學報 (自然科學版), 第 23 卷, 第 1 期, 頁 84-86, 2003。
12. M. Huang, *Vehicle Crash Mechanics*, SAE International, 2002.
13. K. L. Campbell, "Energy Basis for Collision Severity", SAE 740565, 1974.
14. R. R. McHenry, "A Comparison of Results Obtained with Different Analytical Techniques for Reconstruction of Highway Accidents", SAE 750893, 1975.
15. T. Jiang, R. H. Grzebieta, G. Rehnitz, S. Richardson and X. L. Zhao, "Review of Car Frontal Stiffness Equations for Estimating Vehicle impact Velocities", *Proceeding of 18th International Technical Conference on the Enhanced Safety of Vehicles*.
16. D. P. Wood, "Collision Speed Estimation Using a Single Normalized Crush Depth-Impact Speed Characteristic", SAE 920604, 1992.
17. 實車碰撞檢測技術研討會論文集, 車輛研究測試中心, 2002。