

由機車刮地痕長度與行向推估碰撞車速

張超群 Chau-Chin Chang¹

摘 要

本文利用機車碰撞後倒地的刮地痕行向和長度求得機車碰撞後速度，配合機車或汽車碰撞前行向，應用動力學衝量與動量原理推導出碰撞前速度、碰撞過程速度變化與碰撞後速度三個向量的關係式。這三個向量構成一個速度三角形。利用三角形正弦定律與餘弦定律，可求出碰撞前速度的大小。本方法具有不必使用矩陣方程及直接由機車倒地刮地痕長度與行向計算機車速度的優點。應用行車事故鑑定委員會實際案例，詳細說明使用和求解步驟，讓不具力學背景的鑑定會委員與交通警察都容易使用，具有一定的實用價值。

關鍵字：刮地痕行向、衝量與動量原理、正弦定律、速度三角形

一、前 言

台灣交通以機車與機車碰撞或機車與汽車碰撞所佔的比例最高。當事人經常說對方超速，因此如何推估機車碰撞車速便成為交通事故的重要議題。國內外對機車與機車及機車與汽車碰撞速度推估的為研究主要是使用動量守恆定律，應用機車碰撞倒地的刮地痕長度或汽車的煞車痕長度求出碰撞車速(Obenski and Hill, 2002； McNally and Bartlett, 2002； 羅智寧，2008； 郭磊，2008； 林峻弘，2009； 張超群等，2016)。機車與機車碰撞、機車與汽車碰撞較汽車與汽車碰撞複雜，主要原因是機車碰撞後，前輪與把手的方向與原來行駛方向改變較大，碰撞過程的能量損失不易計算。機車質量遠小於汽車的質量，兩車碰撞一般不會明顯改變汽車原來的運動狀態，則用動量守恆定律推估碰撞車速，會誤差較大。一般來說，若機車碰撞重量很大的車(例如貨櫃車)，則不能用動量守恆定律。假設機車與汽車碰撞，機車有轉動，有時甚至轉動很大，但因機車質量小，質量慣性矩小，轉動能量可以忽略不計；而汽車質量大，碰撞過程中通常不發生轉動，即使有轉動也是很小，因此轉動能量也可忽略不計。這樣機車與汽車都不考慮轉動，將機車與汽車視為質點。

本文將機車與汽車視為質點，利用機車碰撞後倒地的刮地痕行向和長度求得機車碰撞後速度，配合機車或汽車碰撞前行向，應用動力學衝量與動量原理(張超群、劉成群，2013)推導出碰撞前速度、碰撞過程速度變化與碰撞

¹ 南臺科技大學機械工程系副教授(聯絡地址：台南市永康區南台街1號，電話：06-2533131 轉 3511，E-mail:ccchang@stust.edu.tw)。

後速度三個向量的關係式。這三個向量構成一個碰撞速度三角形簡稱速度三角形，利用三角形正弦定律和餘弦定律，可求出碰撞前速度的大小。本方法具有簡單易懂，不必使用矩陣方程計算式的優點。注意：本文以粗體符號代表向量，非粗體符號代表純量。

二、基本理論

2.1 衝量與動量原理

設一質點受合力 $\sum \mathbf{F}$ 作用並產生加速度 \mathbf{a} ，根據牛頓第二定律可得

$$\sum \mathbf{F} = m\mathbf{a} = m \frac{d\mathbf{v}}{dt} \quad (1)$$

在牛頓力學中質量 m 為定值，它並不隨速度而變化，所以上式可寫成

$$\sum \mathbf{F} = \frac{d(m\mathbf{v})}{dt} \quad (2)$$

定義動量 \mathbf{L} (Momentum)：

$$\mathbf{L} = m\mathbf{v} \quad (3)$$

則(2)式可表達成

$$\sum \mathbf{F} = \frac{d\mathbf{L}}{dt} = \dot{\mathbf{L}} \quad (4)$$

(4)式稱為動量定理，它說明：作用於一質點的合力等於該質點的動量對時間的變化率。定義力 \mathbf{F} 從時刻 t_0 至 t_1 的衝量(Impulse)為

$$\mathbf{I} = \int_{t_0}^{t_1} \mathbf{F} dt \quad (5)$$

將(2)式從時刻 t_0 至 t_1 對時間積分，得

$$\sum \int_{t_0}^{t_1} \mathbf{F} dt = \int_{v_{10}}^{v_1} d(m\mathbf{v}) = m\mathbf{v}_1 - m\mathbf{v}_{10} = m\Delta\mathbf{v}_1 \quad (6)$$

其中 \mathbf{v}_{10} 與 \mathbf{v}_1 分別是質點在時刻 t_0 與 t_1 的速度。上式說明了質點在 $[t_0, t_1]$ 時間內所受的合衝量等於質點在該段時間動量的變化 $m\Delta\mathbf{v}_1$ 。(6)式可改寫成

$$m\mathbf{v}_{10} + \sum \int_{t_0}^{t_1} \mathbf{F} dt = m\mathbf{v}_1 \quad (7)$$

(7)式稱為線衝量與線動量原理，簡稱衝量與動量原理(Principle of impulse and momentum)，它是動量定理的積分形式。此原理可敘述為：質點的初動量加上其在時間區間 $[t_0, t_1]$ 內所獲得之合衝量等於該質點的末動量，如圖 1 所示，此圖稱為衝量與動量圖。

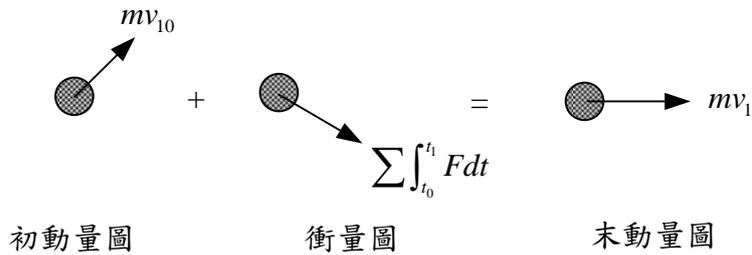


圖 1 衝量與動量原理

2.2 碰撞基本假設

本文對車輛碰撞過程分析的基本假設為

- (1) 由於碰撞的時間極短，其它的力如重力、地面的反作用力與碰撞力相比是很小的，因此可忽略不計。
- (2) 機車與汽車轉動能量忽略不計，將機車與汽車視為質點。

2.3 速度三角形

根據動力學中的衝量與動量原理，機車被撞後的合碰撞力 \mathbf{F} 時所產生的衝量會造成機車的動量變化，即

$$\int \mathbf{F} dt = m\Delta\mathbf{v} \quad (8)$$

由(8)式得速度變化

$$\Delta\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_{10} = \frac{1}{m} \int \mathbf{F} dt = \frac{\mathbf{I}}{m} \quad (9)$$

其中 \mathbf{v}_1 為機車碰撞後速度， \mathbf{v}_{10} 為機車碰撞前速度， \mathbf{v}_{10} 的方向為機車碰撞前行駛方向， \mathbf{v}_1 的方向為機車碰撞後倒地刮地痕方向。由方程(9)知速度變化 $\Delta\mathbf{v}$ 的方向與合衝量 \mathbf{I} 的方向相同，也就是與合碰撞力 \mathbf{F} 的方向相同。 \mathbf{v}_{10} 、 \mathbf{v}_1 、 $\Delta\mathbf{v}_1$ 構成碰撞速度三角形簡稱速度三角形，如圖 2 所示。 \mathbf{v}_{10} 、 \mathbf{v}_1 、 $\Delta\mathbf{v}_1$ 之大小即可應用三角形正弦定律與餘弦定律求解。

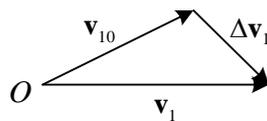


圖 2 速度三角形

三、碰撞車速推估

3.1 碰撞示意圖

汽車與機車碰撞後或機車與機車碰撞後，汽車有滑行距離，機車倒地後有刮地痕長度。根據這些距離和長度可以分別計算汽車、機車碰撞後的速度。圖 3 所示為兩車碰撞模型的示意圖，A 車碰撞前行駛方向和水平方向的夾角為 θ_1 ，B 車碰撞前行駛方向和水平方向的夾角為 θ_2 。設 A、B 車碰撞開始(碰撞前)的速度大小分別為 v_{10} 和 v_{20} ，A、B 車碰撞結束(碰撞後)的速度大小分別為 v_1 和 v_2 ，碰撞結束後 A 車、B 車分別和正 x 方向成 ϕ_1 、 ϕ_2 角，滑動距離 d_1 、 d_2 後停止。 θ_1 和 θ_2 稱為接近角 (Approach angle)，而 ϕ_1 、 ϕ_2 稱為離去角 (Departure angle)。接近角與離去角從水平方向逆時針轉，取正值；順時針轉，取負值。

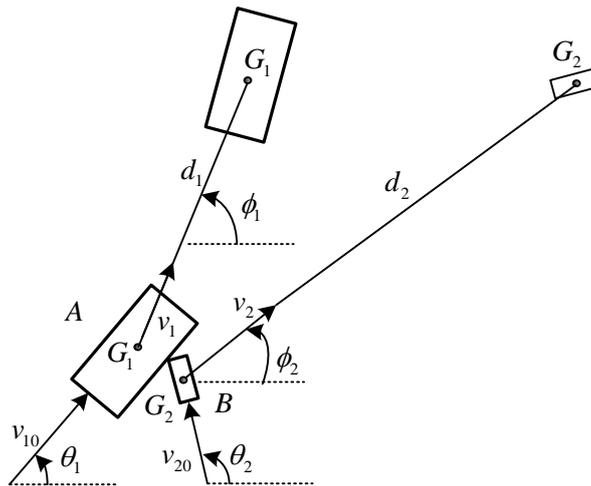


圖 3 碰撞示意圖

3.2 碰撞兩車速度變化關係

若不計車輛的旋轉運動，A 車及 B 車可視為質點。 v_{10} 和 v_{20} 為 A、B 車碰撞開始的速度， v_1 與 v_2 分別為 A、B 車碰撞結束的速度。畫 A、B 車的衝量與動量圖，如圖 4 所示。

對 A 車使用衝量與動量原理，得

$$m_1 v_{10} + \mathbf{I} = m_1 v_1 \quad (10)$$

對 B 車使用衝量與動量原理，得

$$m_2 v_{20} - \mathbf{I} = m_2 v_2 \quad (11)$$

由方程(10)和(11)，得

$$\Delta v_2 = -\frac{m_1}{m_2} \Delta v_1 \quad (12)$$

其中 B 車的速度變化 Δv_2 方向與 A 車的速度變化 Δv_1 方向相反。 B 車的速度變化大小 Δv_2 與 A 車的速度變化大小 Δv_1 之關係為

$$\Delta v_2 = \frac{m_1}{m_2} \Delta v_1 \quad (13)$$

方程(13)表明質量越小，速度變化越大。若兩車質量差異太大，小的速度誤差代入上式便會產生較大的速度誤差。

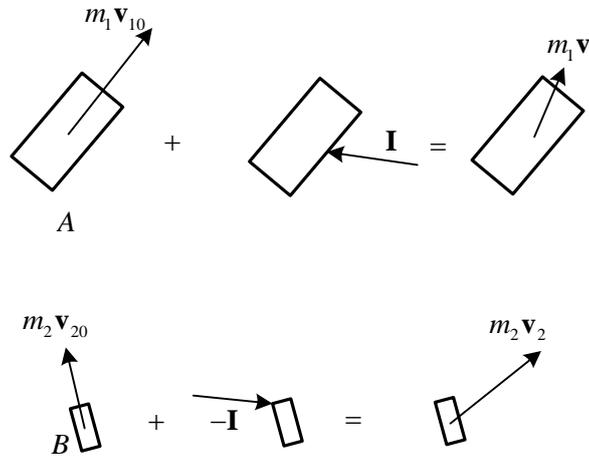


圖 4 A 車和 B 車的衝量與動量圖

3.3 碰撞受力圖

碰撞時在碰撞處會產生與碰撞面垂直的正向碰撞力 F_c 及沿碰撞面的切向碰撞力 F_t ，正向碰撞力 F_c 對時間的積分就是正向衝量 I_c ，切向碰撞力 F_t 對時間的積分就是切向衝量 I_t ， F_c 與 F_t 的合力 F 的方向就是合衝量 I 的方向。畫出 A 車和 B 車的碰撞受力圖，如圖 5(a) 所示。圖 5(a) 中 B 車左上角碰撞到 A 車的側面，因此正向碰撞力 F_c 垂直 A 車側面， A 車相對於 B 車往右上方滑動，因此切向碰撞力 F_t 沿著 A 車側面往左下方，畫出 A 車碰撞受力圖(見圖 5(b)) 後，應用牛頓第三定律(作用力與反作用力定律)，即有大小相等，方向相反的正向碰撞力 F_c 及切向碰撞力 F_t 作用在 B 車上，如圖 5(a) 和 5(c) 所示。速度變化是因碰撞衝量而產生的，因此，速度變化也可分解成正向分量與切向分量，正向分量由正向衝量 I_c 產生，切向分量由切向衝量 I_t 產生。速度變化正向分量必與正向衝量同一

直線，速度變化切向分量必與切向衝量同一直線。

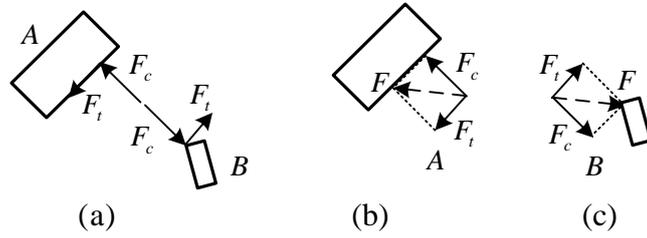


圖 5 碰撞受力圖

因此，對 A 車

$$\mathbf{v}_{10} + \Delta\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_1 \quad (14)$$

可寫成

$$\mathbf{v}_{10} + \Delta\mathbf{v}_{1c} + \Delta\mathbf{v}_{1t} = \mathbf{v}_1 \quad (15)$$

式中 $\Delta\mathbf{v}_{1c}$ 為 A 車速度變化正向分量， $\Delta\mathbf{v}_{1t}$ 為 A 車速度變化正向分量。同理，對 B 車

$$\mathbf{v}_{20} + \Delta\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_2 \quad (16)$$

可寫成

$$\mathbf{v}_{20} + \Delta\mathbf{v}_{2c} + \Delta\mathbf{v}_{2t} = \mathbf{v}_2 \quad (17)$$

式中 $\Delta\mathbf{v}_{2c}$ 為 B 車速度變化正向分量， $\Delta\mathbf{v}_{2t}$ 為 B 車速度變化正向分量。由方程(12)，得

$$m_1\Delta\mathbf{v}_1 = -m_2\Delta\mathbf{v}_2 \quad (18)$$

$$m_1\Delta\mathbf{v}_{1c} + m_1\Delta\mathbf{v}_{1t} = -m_2\Delta\mathbf{v}_{2c} - m_2\Delta\mathbf{v}_{2t} \quad (19)$$

所以

$$m_1\Delta\mathbf{v}_{1c} = -m_2\Delta\mathbf{v}_{2c} \quad (20)$$

$$m_1\Delta\mathbf{v}_{1t} = -m_2\Delta\mathbf{v}_{2t} \quad (21)$$

其大小

$$m_1\Delta v_{1c} = m_2\Delta v_{2c} \quad (22)$$

$$\Delta v_{2c} = \frac{m_1}{m_2} \Delta v_{1c} \quad (23)$$

$$m_1 \Delta v_{1t} = m_2 \Delta v_{2t} \quad (24)$$

$$\Delta v_{2t} = \frac{m_1}{m_2} \Delta v_{1t} \quad (25)$$

3.4 碰撞速度三角形

由於合衝量 I 的方向就是碰撞速度變化 Δv 的方向，如何決定 Δv 的方向，是能求出碰撞前速度的關鍵。參考圖 6， B 車去撞 A 車， A 車原來的行駛方向是 v_{10} 方向被撞後變成 v_1 方向，轉動的角度為 α_1 ，是甚麼力造成 A 車改變方向呢？根據圖 5 中 A 車的碰撞受力圖，切向碰撞力 F_t 沿 A 車原來行駛方向的反向，只能改變速度大小，並不能改變方向；正向碰撞力 F_c 與 A 車原來行駛方向垂直，不能改變速度大小，只能改變速度方向。因此是與行駛方向垂直的正向碰撞力改變速度方向。而此正向碰撞力產生 A 車的速度變化正向分量 Δv_{1c} ，應用方程(23)可求出 B 車的速度變化正向分量 Δv_{2c} 。至於 A 車的速度變化切向分量 Δv_{1t} ，須從 B 車獲得。現將分析步驟說明如下：

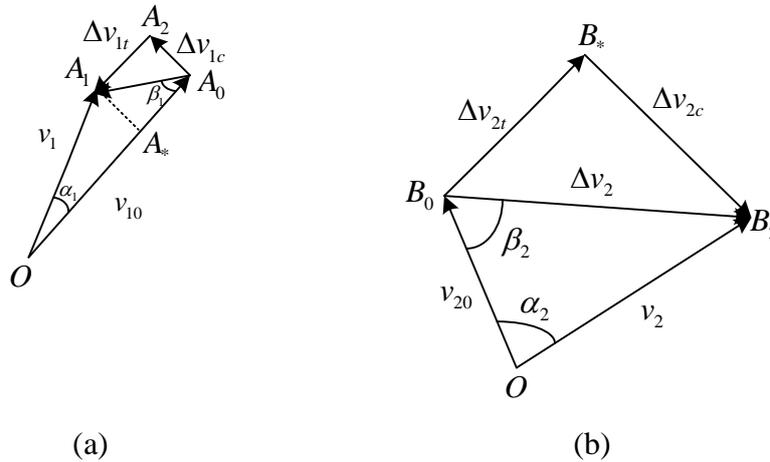


圖 6 速度改變方向分析

- (a) 依據現場圖畫出 A 車碰撞前速度 v_{10} 方向(沿 OA_0)方向。
- (b) 依據現場圖畫出 A 車碰撞後速度 v_1 方向(沿 OA_1)方向，大小 $v_1 = \overline{OA_1}$ 。 v_1 的大小可用刮地痕長度或煞車痕長度求出。
- (c) 從 A_1 作線 A_1A_* 垂直 OA_0 交於 A_* 點，則 $\overline{A_1A_*}$ 的大小就是 A 車的速度變化正向分量 Δv_{1c} 。根據方程(23)可求出 B 車的速度變化正向分量 $\Delta v_{2c} = (m_1/m_2)\Delta v_{1c}$ ，方向與 Δv_{1c} 的方向相反。 A 車的切向速度變化量 Δv_{1t} ，須從 B 車的切線速度變化量 Δv_{2t} 求得。
- (d) B 車碰撞後從原來行駛方向 $\overline{OB_0}$ 偏轉 α_2 角至 $\overline{OB_2}$ 方向，碰撞後速度大

小 $v_2 = \overline{OB_2}$ 。先從 O 點畫線 $\overline{OB_2}$ 代表 B 車碰撞後速度 v_2 ， B 車的速度變化正向分量 $\Delta v_{2c} = (m_1/m_2)\Delta v_{1c}$ 已從步驟(c)中求出。因此從 B_2 做線段 $\overline{B_2B_*}$ 代表 Δv_{2c} ， $\overline{B_*B_2}$ 向量就是 $\Delta \mathbf{v}_{2c}$ 。 Δv_{2t} 的方向沿 F_t 的方向。因此，從 B_* 畫線平行 F_t 交 $\overline{OB_0}$ 於 B_0 ，則 $\overline{B_0B_*}$ 向量就是 $\Delta \mathbf{v}_{2t}$ 其大小 $\overline{B_0B_*} = \Delta v_{2t}$ ，根據方程 (25)， A 車的速度變化正向分量 $\Delta v_{1t} = (m_2/m_1)\Delta v_{2t}$ 。 $\overline{B_0B_2}$ 就是 B 車的速度變化 $\Delta \mathbf{v}_2 = \Delta \mathbf{v}_{2t} + \Delta \mathbf{v}_{2c}$ ， $\overline{B_0B_2}$ 之長度 $\overline{B_0B_2} = \Delta v_2$ ， $\triangle OB_0B_2$ 就是 B 車速度三角形，如圖 6(b)和圖 7(b)所示。 B 車碰撞前速度 \mathbf{v}_{20} 大小就是 $v_{20} = \overline{OB_0}$ ，方向沿 $\overline{OB_0}$ ，偏轉角 $\alpha_2 = |\phi_2 - \theta_2|$ 。

- (e) A 車的速度變化正向分量 $\Delta v_{1t} = (m_2/m_1)\Delta v_{2t}$ 已從步驟(d)求出，因此回到步驟(b)之圖 6(a)。從 A_1 做線段 $\overline{A_1A_2}$ 平行 F_t 代表 Δv_{1t} ，再從 A_2 做線段 $\overline{A_2A_0}$ 平行 $\overline{A_1A_*}$ 且 $\overline{A_2A_0} = \overline{A_1A_0}$ ，則 $v_{10} = \overline{OA_0}$ 。則 $\overline{A_0A_1}$ 向量就是 A 車的速度變化 $\Delta \mathbf{v}_1 = \Delta \mathbf{v}_{1t} + \Delta \mathbf{v}_{1c}$ ， $\overline{A_0A_1}$ 向量的長度 $\overline{A_0A_1} = \Delta v_1$ 代表 A 車速度變化之大小， $\triangle OA_0A_1$ 就是 A 車速度三角形，如圖 6(a)和圖 7(a)所示。 A 車碰撞前速度 \mathbf{v}_{10} 大小就是 $v_{10} = \overline{OA_0}$ ，方向沿 $\overline{OA_0}$ ，偏轉角 $\alpha_1 = |\phi_1 - \theta_1|$ 。

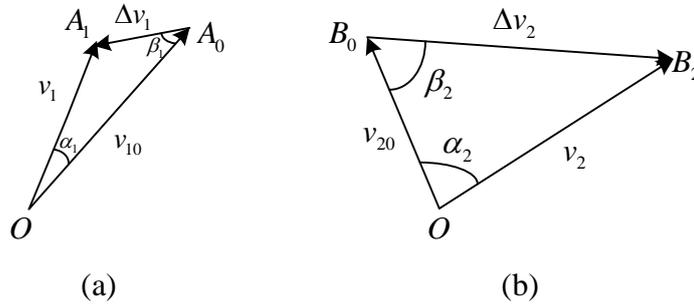


圖 7 A 車和 B 車的碰撞速度三角形

3.5 計算速度

(1) 計算碰撞後速度

汽車 A 車碰撞後的車速 v_1 可由 A 車煞車滑動距離 d_1 及 A 車輪胎與路面的摩擦係數 μ_1 ，應用功能原理求出：

$$v_1 = \sqrt{2\mu_1 g d_1} \text{ (m/s)} = \sqrt{254\mu_1 d_1} \text{ (km/h)} \quad (26)$$

式中重力加速度 $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ 。現今的汽車都大都含 ABS，車輛制動時路面上通常看不出有煞車痕。對 ABS 車輛，煞車距離較無 ABS 的車輛距離短，因此應用公式(26)計算汽車車速的結果是偏於保守的。對含 ABS 汽車可使用(張超群等，2017)

$$v_1 = 1.1\sqrt{2\mu_1gd_1} \text{ (m/s)} = 1.1\sqrt{254\mu_1d_1} \text{ (km/h)} \quad (27)$$

或仍使用(26)式，但提高摩擦係數 μ_1 之值。例如一般鑑定中 μ_1 取 0.75，但因 ABS 制動距離較短，對 ABS 車輛可取 $\mu_1 = (1.1)^2 \times 0.75 = 0.9$ ，這樣就可用方程(18)求碰撞後車速 v_1 (張超群等，2017)。

機車倒地速度可視為機車碰撞後車速 v_2 ，它可由路面留下的刮地痕長度 d_2 求得：

$$v_2 = \sqrt{2\mu_2gd_2} \text{ (m/s)} = \sqrt{254\mu_2d_2} \text{ (km/h)} \quad (28)$$

機車倒地後在路面上刮地痕的摩擦係數，通常機車左倒取 $\mu_2 = 0.5$ ，右倒取 $\mu_2 = 0.45$ (吳樹遠，2008)。

(2) 計算碰撞前速度與速度變化

參考圖 7，對 A 車 $\angle OA_1A_0 = 180^\circ - \alpha_1 - \beta_1$ ，利用正弦定律，得

$$\frac{v_{10}}{\sin(180^\circ - \alpha_1 - \beta_1)} = \frac{\Delta v_1}{\sin \alpha_1} = \frac{v_1}{\sin \beta_1} \quad (29)$$

從(29)式，可求出 A 車碰撞前車速 v_{10} 和速度變化 Δv_1 。

參考圖 7，設碰撞後 B 車從原來行駛方向 $\overline{OB_0}$ 偏轉 α_2 角至 $\overline{OB_2}$ 方向，利用正弦定律，得

$$\frac{v_{20}}{\sin(180^\circ - \alpha_2 - \beta_2)} = \frac{\Delta v_2}{\sin \alpha_2} = \frac{v_2}{\sin \beta_2} \quad (30)$$

可解出 B 車碰撞前車速 v_{20} 和速度變化 Δv_2 。

四、實際案例分析

本文的機車碰撞車速推估的步驟大致如下：

(1) 畫碰撞示意圖；(2) 畫碰撞受力圖；(3) 畫速度三角形；(4) 列出計算所需的參數及其值；(5) 計算速度。

例 1 兩部機車於路口發生碰撞，其事故現場圖如圖 8 所示，推估兩部機車碰撞前速度。

(1) 畫碰撞示意圖：根據現場圖畫出碰撞示意圖，如圖 9 所示。

因為 A 車碰撞前以速度 v_{10} 從北往南行駛， v_{10} 的方向與水平方向夾角為 90° ，但順時針旋轉，因此 A 車的接近角 $\theta_1 = -90^\circ$ 。A 車碰撞後速度 v_1 (刮地痕方向) 與水平方向夾角為順時針 $\tan^{-1}((2.2-1.9)/2.6) = 6.6^\circ$ ，所以機車 A 離去角 $\phi_1 = -6.6^\circ$ 。機車 A 右倒刮地痕長度 $d_1 = 3.6\text{m}$ 。

B 車碰撞前以速度 v_{20} 從西往東行駛， v_{20} 的方向與水平方向夾角為 0° ，因此 B 車的接近角 $\theta_2 = 0^{\circ}$ 。 B 車碰撞後速度 v_2 (刮地痕方向) 與水平方向夾角順時針旋轉為 35° ，所以機車 B 離去角 $\phi_2 = -35^{\circ}$ 。機車 B 左側刮地痕長度 $d_2 = 4.5\text{m}$ 。

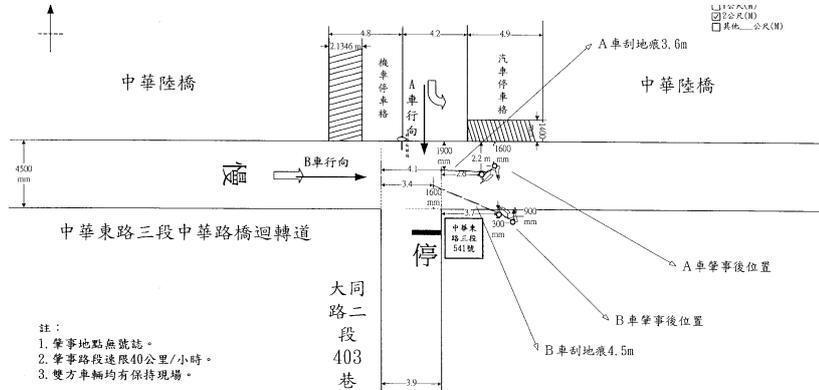


圖 8 兩部機車碰撞的現場圖

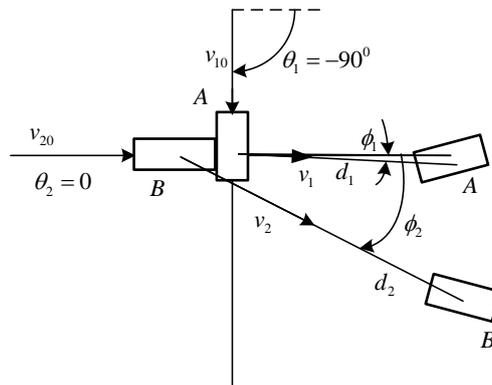


圖 9 圖 8 之碰撞示意圖

(2) 畫碰撞受力圖：如圖 10 所示。

圖 9 中 B 車正面碰撞到 A 車的側面，因此正向碰撞力 F_c 垂直 A 車側面， A 車相對於 B 車往下方滑動，因此切向碰撞力 F_t 沿著 A 車側面往上方，畫出 A 車碰撞受力圖後，應用牛頓第三定律(作用力與反作用力定律)，即有大小相等，方向相反的正向碰撞力 F_c 及切向碰撞力 F_t 作用在 B 車上，如圖 10 所示。

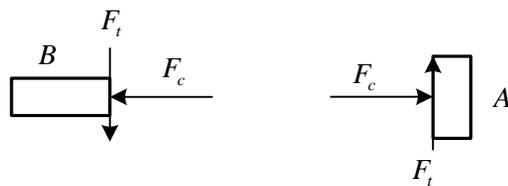


圖 10 兩車之受力圖

(3) 畫速度分析圖

A 車的接近角 $\theta_1 = -90^\circ$ ，因此從 O 點畫 v_{10} 方向朝下。機車 A 離去角 $\phi_1 = -6.6^\circ$ ， v_{10} 與 v_1 的夾角 $\alpha_1 = |\phi_1 - \theta_1| = |-6.6^\circ - (-90^\circ)| = 83.4^\circ$ ，因此從 O 點方向朝右方畫 $v_1 = \overline{OA_1}$ ， v_1 與 v_{10} 夾角為 α_1 。正向碰撞力 F_c 使 A 車改變方向，從 A_1 作線 $\overline{A_1A_*}$ 垂直 $\overline{OA_0}$ 交於 A_* 點，則 $\overline{A_1A_*}$ 的大小就是 A 車的速度變化正向分量 $\Delta v_{1c} = \overline{A_1A_*} = v_1 \sin \alpha_1$ 。根據方程(23)，可求出 B 車的速度變化正向分量 $\Delta v_{2c} = (m_1/m_2)\Delta v_{1c}$ ，方向與 Δv_{1c} 的方向相反。

B 車碰撞前以速度 v_{20} 從西往東行駛，接近角 $\theta_2 = 0^\circ$ ，因此從 O 點畫 $\overline{OB_0}$ 方向朝右。機車 B 離去角 $\phi_2 = -35^\circ$ ， v_{20} 與 v_2 的夾角 $\alpha_2 = |\phi_2 - \theta_2| = |0 - (-35^\circ)| = 35^\circ$ ，所以從 O 點方向朝右下方畫 $v_2 = \overline{OB_2}$ ， $v_2 = \overline{OB_2}$ 與 v_{20} 夾角為 α_2 。參考圖 10 中 B 車受力圖，切向碰撞力 F_t 使 B 車偏離原來行駛方向。因此從 B_2 做線段 $\overline{B_2B_*}$ 代表 $\Delta v_{2t} = \overline{B_2B_*} = v_2 \sin \alpha_2$ ， $\overline{B_*B_2}$ 向量就是 $\Delta \mathbf{v}_{2t}$ ，根據方程(25)，可求出 A 車的速度變化切向分量 $\Delta v_{1t} = (m_2/m_1)\Delta v_{2t}$ 。應用前面求出之 Δv_{2c} ，從 B_2 做 $\Delta v_{2c} = \overline{B_2B_1}$ 線段平行 $\overline{A_1A_*}$ ，再從 B_1 做線平行 $\overline{B_2B_*}$ 交 $\overline{OB_0}$ 於 B_0 點， ΔOB_0B_2 就是 B 車的速度三角形， $v_{20} = \overline{OB_0}$ 、 $\Delta v_2 = \overline{B_0B_2}$ ，如圖 11(a)所示。從 A_1 做線段 $\overline{A_1A_2} = \Delta v_{1t}$ 平行 F_t 代表 Δv_{1t} ，再從 A_2 做線段 $\overline{A_2A_0}$ 平行 $\overline{A_1A_*}$ 且 $\overline{A_2A_0} = \overline{A_1A_*}$ ，則 $v_{10} = \overline{OA_0}$ ， $\overline{A_0A_1}$ 向量就是 A 車的速度變化 $\Delta \mathbf{v}_1 = \Delta \mathbf{v}_{1t} + \Delta \mathbf{v}_{1c}$ ， $\overline{A_0A_1}$ 長度 $\overline{A_0A_1} = \Delta v_1$ ，而 A 車碰撞前速度 v_{10} 大小就是 $\overline{OA_0}$ ，方向沿 $\overline{OA_0}$ 。 ΔOA_0A_1 就是 A 車的速度三角形，如圖 11(b)所示。圖中

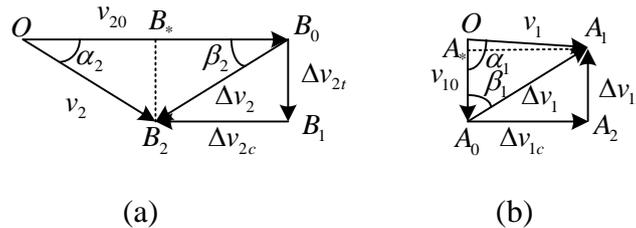


圖 11 兩車之速度三角形圖

$$\Delta v_1 = \sqrt{(\Delta v_{1c})^2 + (\Delta v_{1t})^2}$$

$$\Delta v_2 = \sqrt{(\Delta v_{2c})^2 + (\Delta v_{2t})^2}$$

$$\beta_1 = \tan^{-1} \frac{\Delta v_{1c}}{\Delta v_{1t}}$$

$$\beta_2 = \tan^{-1} \frac{\Delta v_{2t}}{\Delta v_{2c}}$$

$$\frac{v_{10}}{\sin(180^\circ - \alpha_1 - \beta_1)} = \frac{\Delta v_1}{\sin \alpha_1} = \frac{v_1}{\sin \beta_1}$$

$$\frac{v_{20}}{\sin(180^\circ - \alpha_2 - \beta_2)} = \frac{\Delta v_2}{\sin \alpha_2} = \frac{v_2}{\sin \beta_2}$$

(4) 列出計算所需的參數及其值：如表 1 所示。

表 1 兩部機車的資料

機車 A 接近角 θ_1	-90°	機車 A 質量 m_1	110kg
機車 A 離去角 ϕ_1	-6.6°	機車 B 質量 m_2	110kg
機車 B 接近角 θ_2	0°	機車 A 右倒刮地痕長度 d_1	3.6m
機車 B 離去角 ϕ_2	-35°	機車 B 左倒刮地痕長度 d_2	4.5m

(5) 計算速度：

機車 A 右倒刮地痕摩擦係數 $\mu_1 = 0.45$ ，機車 B 左倒刮地痕摩擦係數 $\mu_2 = 0.5$ ，機車 A 碰撞後刮地長度 $d_1 = 3.6\text{m}$ ，機車 B 碰撞後刮地長度 $d_2 = 4.5\text{m}$ ，求出機車倒地時的車速

$$v_1 = \sqrt{2\mu_1 g d_1} = \sqrt{2 \times 0.45 \times 9.81 \times 3.6} = 5.64 \text{ m/s} = 20.30 \text{ km/h}$$

$$v_2 = \sqrt{2\mu_2 g d_2} = \sqrt{2 \times 0.5 \times 9.81 \times 4.5} = 6.64 \text{ m/s} = 23.90 \text{ km/h}$$

$$\Delta v_{2t} = v_2 \sin \alpha_2 = 6.64 \sin 35^\circ = 3.81 \text{ m/s}$$

$$\Delta v_{1t} = (m_2 / m_1) \Delta v_{2t} = (110 / 110) \times 3.81 = 3.81 \text{ m/s}$$

$$\Delta v_{1c} = v_1 \sin \alpha_1 = 5.64 \sin 83.4^\circ = 5.60 \text{ m/s}$$

$$\Delta v_{2c} = (m_1 / m_2) \Delta v_{1c} = (110 / 110) \times 5.60 = 5.60 \text{ m/s}$$

$$\Delta v_1 = \sqrt{(\Delta v_{1c})^2 + (\Delta v_{1t})^2} = \sqrt{(5.60)^2 + (3.81)^2} = 6.77 \text{ m/s}$$

$$\Delta v_2 = \sqrt{(\Delta v_{2c})^2 + (\Delta v_{2t})^2} = \sqrt{(5.60)^2 + (3.81)^2} = 6.77 \text{ m/s}$$

$$\beta_1 = \tan^{-1} \frac{\Delta v_{1c}}{\Delta v_{1t}} = \tan^{-1} \frac{5.60}{3.81} = 55.8^\circ$$

$$\beta_2 = \tan^{-1} \frac{\Delta v_{2t}}{\Delta v_{2c}} = \tan^{-1} \frac{3.81}{5.60} = 34.2^\circ$$

$$\text{對 } A \text{ 車 } \angle OA_1A_0 = 180^\circ - \alpha_1 - \beta_1 = 180^\circ - 83.4^\circ - 55.8^\circ = 40.8^\circ$$

$$\text{對 } B \text{ 車 } \angle OB_2B_0 = 180^\circ - \alpha_2 - \beta_2 = 180^\circ - 35^\circ - 34.2^\circ = 110.8^\circ$$

利用正弦定律，得

$$\frac{v_{10}}{\sin(180^\circ - \alpha_1 - \beta_1)} = \frac{\Delta v_1}{\sin \alpha_1} = \frac{v_1}{\sin \beta_1}, \quad \frac{v_{10}}{\sin 40.8^\circ} = \frac{6.77}{\sin 83.4^\circ} = \frac{5.64}{\sin 55.8^\circ}$$

$$\frac{v_{20}}{\sin(180^\circ - \alpha_2 - \beta_2)} = \frac{\Delta v_2}{\sin \alpha_2} = \frac{v_2}{\sin \beta_2}, \quad \frac{v_{20}}{\sin 110.8^\circ} = \frac{6.77}{\sin 35^\circ} = \frac{6.64}{\sin 34.2^\circ}$$

可求出 A 車碰撞前車速 $v_{10} = 4.45 \text{ m/s} = 16.02 \text{ km/h}$ ， B 車碰撞前車速 $v_{20} = 11.04 \text{ m/s} = 39.74 \text{ km/h}$ 。

例 2 汽車 B 由西向東行駛，在十字路口撞擊由南向北行駛的機車 A ，其事故現場圖如圖 12 所示，推估兩部車碰撞前速度。

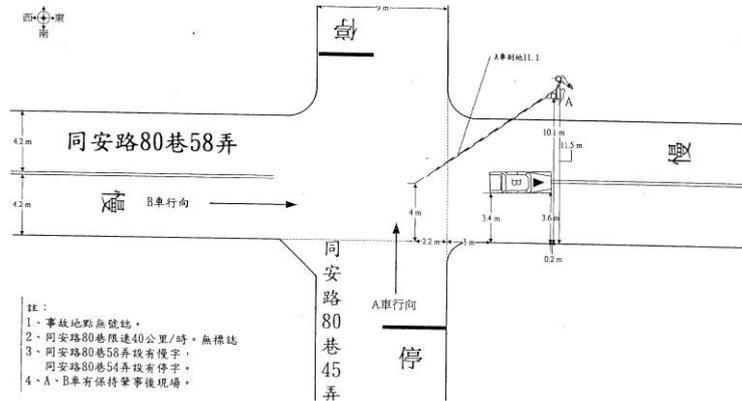


圖 12 汽車碰撞機車的現場圖

(1) 畫碰撞示意圖：根據現場圖畫出碰撞示意圖，如圖 13 所示。

因為 A 車碰撞前以速度 v_{10} 從南往北行駛， v_{10} 的方向與水平方向夾角為逆時針旋轉 90° ，因此 A 車的接近角 $\theta_1 = 90^\circ$ 。 A 車碰撞後速度 v_1 與水平方向夾角為逆時針旋轉 35° ，所以機車 A 離去角 $\phi_1 = 35^\circ$ 。機車 A 右側刮地痕長度 $d_1 = 11.1 \text{ m}$ 。

B 車碰撞前以速度 v_{20} 從西往東行駛， v_{20} 的方向與水平方向夾角為 0° ，因此 B 車的接近角 $\theta_2 = 0^\circ$ 。 B 車碰撞後速度 v_2 與水平方向夾角為逆時針旋轉 $\tan^{-1}((3.6 - 3.4)/4.6) = 2.5^\circ$ ，其中 4.6 m 為汽車長度，所以汽車 B 離去角 $\phi_2 = 2.5^\circ$ 。汽車 B 滑行距離 $d_2 = 9.56 \text{ m}$ 。

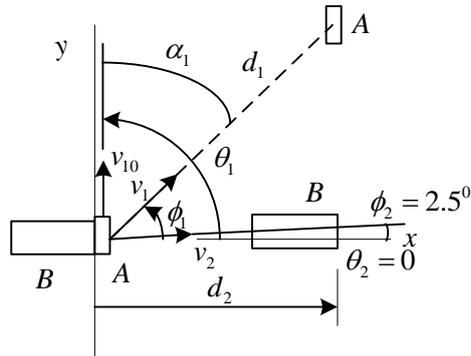


圖 13 圖 12 之碰撞示意圖

(2) 畫碰撞受力圖：如圖 14 所示。

圖 13 中 B 車正面碰撞到 A 車的側面，因此正向碰撞力 F_c 垂直 A 車側面， A 車相對於 B 車往上方滑動，因此切向碰撞力 F_t 沿著 A 車側面往下方，畫出 A 車後，應用牛頓第三定律，即有大小相等，方向相反的正向碰撞力 F_c 及切向碰撞力 F_t 作用在 B 車上，如圖 14 所示。

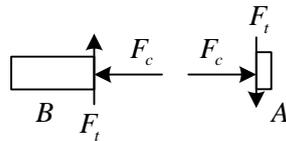


圖 14 兩車之碰撞受力圖

(3) 畫速度三角形：如圖 15 所示。

A 車的接近角 $\theta_1 = 90^\circ$ ，因此從 O 點畫 v_{10} 方向朝上。機車 A 離去角 $\phi_1 = 35^\circ$ ， v_{10} 與 v_1 的夾角 $\alpha_1 = |\phi_1 - \theta_1| = |35^\circ - (90^\circ)| = 55^\circ$ ，因此從 O 點方向朝右上方畫 $v_1 = \overline{OA_1}$ ， v_1 與 v_{10} 夾角為 α_1 ，正向碰撞力 F_c 使 A 車改變方向，因此從 A_1 作線 $\overline{A_1A_*}$ 垂直 OA_1 交於 A_* 點，則 $\overline{A_1A_*}$ 的大小就是 A 車的速度變化正向分量 $\Delta v_{1c} = \overline{A_1A_*} = v_1 \sin \alpha_1$ 。根據方程(23)，可求出 B 車的速度變化正向分量 $\Delta v_{2c} = (m_1/m_2)\Delta v_{1c}$ ，方向與 Δv_{1c} 的方向相反。

B 車碰撞前以速度 v_{20} 從西往東行駛，接近角 $\theta_2 = 0^\circ$ ，因此從 O 點畫 $\overline{OB_0}$ 方向朝右。機車 B 離去角 $\phi_2 = 2.5^\circ$ ， v_{20} 與 v_2 的夾角 $\alpha_2 = |\phi_2 - \theta_2| = |2.5^\circ - (0^\circ)| = 2.5^\circ$ ，因此從 O 點方向朝右上方畫 $v_2 = \overline{OB_2}$ ， $v_2 = \overline{OB_2}$ 與 v_{20} 夾角為 α_2 。參考圖 14 的 B 車受力圖，是切向碰撞力 F_t 使 B 車偏離原來行駛方向，因此從 B_2 做線段 $\overline{B_2B_*}$ 代表 $\Delta v_{2t} = \overline{B_2B_*} = v_2 \sin \alpha_2$ ， $\overline{B_*B_2}$ 向量就是 Δv_{2t} 。根據方程(25)，可求出 A 車的速度變化切向分量

$\Delta v_{1t} = (m_2/m_1)\Delta v_{2t}$ 。應用前面求出之 Δv_{2c} ，從 B_2 做 $\Delta v_{2c} = \overline{B_2B_1}$ 線段平行 $\overline{A_1A_*}$ ，再從 B_1 做線段平行 $\overline{B_2B_*}$ 交 $\overline{OB_0}$ 於 B_0 點， ΔOB_0B_2 就是 B 車的速度三角形， $v_{20} = \overline{OB_0}$ 、 $\Delta v_2 = \overline{B_0B_2}$ ，如圖 15(a) 所示。從 A_1 做線段 $\overline{A_1A_2} = \Delta v_{1t}$ 平行 F_t 代表 Δv_{1t} ，再從 A_2 做線段 $\overline{A_2A_0}$ 平行 $\overline{A_1A_*}$ 且 $\overline{A_2A_0} = \overline{A_1A_*}$ ，則 $v_{10} = \overline{OA_0}$ ， $\overline{A_0A_1}$ 向量就是 A 車的速度變化 $\Delta v_1 = \Delta v_{1t} + \Delta v_{1c}$ ， $\overline{A_0A_1}$ 長度 $A_0A_1 = \Delta v_1$ ，而 A 車碰撞前速度 v_{10} 大小就是 $\overline{OA_0}$ ，方向沿 $\overline{OA_0}$ 。 ΔOA_0A_1 就是 A 車的速度三角形，如圖 15(b) 所示。

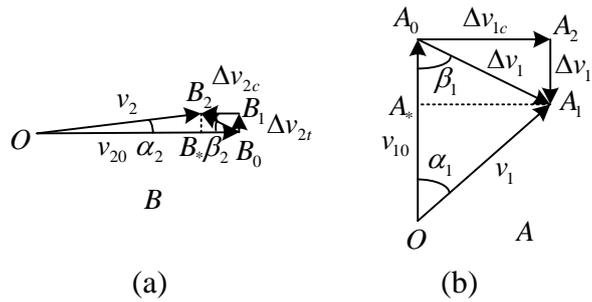


圖 15 兩車之速度三角形

(4) 列出計算所需的參數及其值：如表 2 所示。

表 2 兩部車的資料

機車 A 接近角 θ_1	90^0	機車 A 質量 m_1	110kg
機車 A 離去角 ϕ_1	35^0	汽車 B 質量 m_2	1300kg
汽車 B 接近角 θ_2	0^0	機車 A 右側刮地痕長度 d_1	11.1m
汽車 B 離去角 ϕ_2	2.5^0	汽車滑行長度 d_2	9.56m

(5) 計算速度：

因機車 A 右側刮地痕摩擦係數 $\mu_1 = 0.45$ ，求出機車倒地時的車速

$$v_1 = \sqrt{2\mu_1 g d_1} = \sqrt{2 \times 0.45 \times 9.81 \times 11.1} = 9.90 \text{ m/s} = 35.64 \text{ km/h}$$

汽車 B 與機車 A 的碰撞點可假設為機車刮地痕延長線與汽車行駛方向的交點，從碰撞點到汽車停止位置的距離 $d_2 = 9.56 \text{ m}$ 。因汽車有 ABS，制動時路面沒有煞車痕，可假設汽車與地面的摩擦係數 $\mu_2 = 0.9$ ，汽車碰撞後的車速

$$v_2 = \sqrt{2\mu_2 g d_2} = \sqrt{2 \times 0.9 \times 9.81 \times 9.56} = 12.99 \text{ m/s} = 46.76 \text{ km/h}$$

$$\Delta v_{2t} = v_2 \sin \alpha_2 = 12.99 \sin 2.5^0 = 0.567 \text{ m/s}$$

$$\Delta v_{1t} = (m_2/m_1)\Delta v_{2t} = (1300/110) \times 0.567 = 6.70 \text{ m/s}$$

$$\Delta v_{1c} = v_1 \sin \alpha_1 = 9.90 \sin 55^\circ = 8.11 \text{ m/s}$$

$$\Delta v_{2c} = (m_1 / m_2) \Delta v_{1c} = (110 / 1300) \times 8.11 = 0.686 \text{ m/s}$$

$$\Delta v_1 = \sqrt{(\Delta v_{1c})^2 + (\Delta v_{1t})^2} = \sqrt{(8.11)^2 + (6.70)^2} = 10.52 \text{ m/s}$$

$$\Delta v_2 = \sqrt{(\Delta v_{2c})^2 + (\Delta v_{2t})^2} = \sqrt{(0.686)^2 + (0.567)^2} = 0.89 \text{ m/s}$$

$$\beta_1 = \tan^{-1} \frac{\Delta v_{1c}}{\Delta v_{1t}} = \tan^{-1} \frac{8.11}{6.70} = 50.44^\circ$$

$$\beta_2 = \tan^{-1} \frac{\Delta v_{2t}}{\Delta v_{2c}} = \tan^{-1} \frac{0.567}{0.686} = 39.56^\circ$$

$$\text{對 } A \text{ 車 } \angle OA_1A_0 = 180^\circ - \alpha_1 - \beta_1 = 180^\circ - 55^\circ - 50.44^\circ = 74.56^\circ$$

對 B 車 $\angle OB_2B_0 = 180^\circ - \alpha_2 - \beta_2 = 180^\circ - 2.5^\circ - 39.56^\circ = 137.94^\circ$ ，利用正弦定律，得

$$\frac{v_{10}}{\sin(180^\circ - \alpha_1 - \beta_1)} = \frac{\Delta v_1}{\sin \alpha_1} = \frac{v_1}{\sin \beta_1} \quad , \quad \frac{v_{10}}{\sin 74.56^\circ} = \frac{10.52}{\sin 55^\circ} = \frac{9.90}{\sin 50.44^\circ}$$

$$\frac{v_{20}}{\sin(180^\circ - \alpha_2 - \beta_2)} = \frac{\Delta v_2}{\sin \alpha_2} = \frac{v_2}{\sin \beta_2} \quad , \quad \frac{v_{20}}{\sin 137.94^\circ} = \frac{0.89}{\sin 2.5^\circ} = \frac{12.99}{\sin 39.56^\circ}$$

可求出 A 車碰撞前車速 $v_{10} = 12.37 \text{ m/s} = 44.53 \text{ km/h}$ ， B 車碰撞前車速 $v_{20} = 13.66 \text{ m/s} = 49.18 \text{ km/h}$

五、結論

本文在忽略轉動能量的假設下，將機車與汽車視為質點。應用動力學中的衝量與動量原理，配合汽機車行向、機車倒地的刮地痕長度與方向、汽車停止位置，得到碰撞速度三角形，再利用三角形的正弦定律來推估機車與汽車碰撞、機車與機車碰撞的速度。我們應用行車事故鑑定委員會實際案例，詳細說明使用和求解步驟。本文的速度計算方法與動量法相比，具有不用計算矩陣方程之優點。此外，若所有的物理量都按比例精確畫圖，則速度值可直接按圖的比例求出。

致謝

感謝臺南市車輛行車事故鑑定委員會提供會議案件作為本文之案例。

參考文獻

- 林峻弘(2009)，機車事故鑑定之行車速度推估研究，龍華科技大學工程技術研究所碩士論文。
- 吳樹遠(2008)，機車刮地痕摩擦係數測試與分析，南臺科技大學碩士論文。
- 郭磊(2008)，汽車與兩輪車碰撞事故的仿真研究及應用，上海交通大學機械與動力工程學院博士論文。
- 張超群、劉成群(2013)，*動力學*，臺北：新文京開發出版股份有限公司。
- 張超群、蘇天保、翁榮宏、黃郁仁(2015)，「由煞車痕與刮地痕推估車速之研究」，*104 年道路交通安全與執法研討會*。
- 張超群、蘇天保、謝昇毅、翁榮宏、蔡崇景、黃郁仁(2016)，「機車碰撞車速推估之研究」，*105 年道路交通安全與執法研討會*。
- 張超群、許哲嘉、黃國平、吳宗霖(2017)，*交通事故力學*，臺北：新文京開發出版股份有限公司。
- 羅智寧(2008)，汽車與摩托車碰撞事故車速估計建模，吉林大學碩士論文。
- 臺南市車輛行車事故鑑定委員會會議案件。
- McNally, B. F. and Bartlett, W. (2002), "Motorcycle Speed Estimates Using Conservation of Linear and Rotational Momentum", *20th Annual Special Problems in Traffic Crash Reconstruction at the Institute of Police Technology and Management*.
- Obenski, K. S. and Hill, P. F. (2002), *Motorcycle Accident Reconstruction and Litigation*, 3rd ed., Tucson, AZ: Lawyers & Judges Publishing Company.