

新的安全速率密度模式之推導

范俊海

淡江大學交通管理學系暨運輸科學研究所副教授

摘要

跟車理論在從事交通分析是非常重要的基礎，但是過去在這方面的探討一直忽略車輛長度在時空上的影響，跟車的產生是有其門檻值，如果因為太遠或速度差距過大，車輛之間的跟車行為可說是若有若無，而當產生跟車行為時，車輛間的距離已慢慢地縮減。傳統跟車理論在模式上，只重視三樣重要的參數，其中包括間距(Headway)、相對速度以及後車本身的速度，由於間距的形成乃是指前車的保險桿與後車的保險桿為準，因此當我們進行各種模擬時，可能會產生車輛重疊的情形，這種現象在擁擠車流的時候更顯得不合情理。本研究以安全為其模式之考量，採用間隙(Gap)來代替間距，以構建新跟車理論，並且引入車輛長度的變數，經過理論的推導本文得到巨觀的速度密度模式的修正式。本研究為了瞭解新構建模式的合理性，進行相關參數的敏感度分析，並且與傳統的跟車模式及速度密度模式進行理論上的比較。

在新模式的推導上，本研究重新考慮跟車駕駛人在跟車時所據以反應的函數，進一步修正傳統模式物理意義的缺乏。組合間隙與視覺反應模式，本文構建出一個在擁擠時候合理的模式。由於模式的分析只進行理論上解析，對於實際上模式的驗證尚待進一步來探討，以期在交通分析上有更重大的突破。

一、前言

速率密度函數在車流模式研究上是非常重要的關係，它不但牽動巨觀車流的其他模式，而且它也串連著微觀車流的運作。在應用上，對於車流模擬、車流分析影響甚巨，因此早在1935年Greenshields就提出速率密度線性模式。速率密度函數的推斷可分為二大方向，第一是採用真實調查資料做為函數適合度的判定，例如Greenberg(1959)[4]、Underwood(1961)[8]、以及Drake(1967)[2]等模式都是依據資料的觀察所推演出來的。然而最大的問題來自於他們資料的取得方式，包括如何適當地過濾資料令人疑慮。第二是依據行為以及現象的假設所推導過來的，例如Gerlough and Huber(1975)[3]乃從跟車模式進行積分與微分的過程來建立速率密度的關係，Prigogine and Herman(1971)[7]是從動力方程式的推導可以建立出速率密度函數。雖然行為的假設在物理意義上較有說明強度，但是其合理性的驗證也較為艱難。因此Castillo(1995)[5]依據新的參數限制並且引入等值空間概念(equivalent spacing)，對速率密度函數進行兩方向的推導。由於Castillo在產生函數的引數採用在文中未有明確之交待，雖然透過邊界條件的調整，在物理意義的解釋上稍顯不足。

本文從跟車現象的形成，發現車輛會以跟車的方式前進，大都發生在車輛眾多密度擁擠的時候，然而在車間距較長的時候，車輛之變動也漸趨於不敏感，這種現象在GM第二代跟車模式已採用不同的敏感係數來表示。由於GM第三跟車模式成功地推導成Greenberg的速率密度函數，拉進了微觀與巨觀之間的解釋能力。本研究檢討跟車模式的參數，嘗試推導出新的模式，並以視覺反應模式的修正建構速率密度函數，以做為模式發展的基礎。

二、理論發展基礎

所謂的跟車 (car-following) 是指跟隨車在非自由流 (因其駕駛行為會受前車影響) 的行駛過程中，須經常調整其行車速度以便和前車保持一安全的間距時，其動態的行為。跟車理論主要的研究內容就是在描述當跟車行為產生時，跟隨車與前車之間的互動關係，而其研究目的是希望能找出駕駛者在跟車時所共同具有的一些反應或行為，並將這些變數的關係以方程式來描述。

刺激-反應跟車模式的發展最早可追溯到1950年代，Pipes以安全距離的觀念建立跟隨車的車速和間距的關係 [1]，此後，隨著許多車流學者 (如Forbes、Greenberg等) 以及美國通用汽車公司的研究群 (包括Chandel、Herman、Gazis、Edie等) 加入此方面的研究，最後完成此類跟車模式的通式 (GM第五跟車模式)，故日後的研究大都稱此類模式為GM跟車模式，由於此類模式是以前後車的相對速度差做為跟隨車駕駛人的刺激項，因此也有人稱此類模式為刺激-反應方程式。

另一方面，Pipes曾利用駕駛者觀看前車時的視角變化率當作刺激項，並進一步推導出視覺反應跟車模式 [6]，如 (1) 式，該研究所推導出的結果正好是GM跟車模式中，參數值 m 為0、 l 為2的結果，從這項研究結果中我們可以發現，GM跟車模式中的參數值，其數值的意義可以從行為的角度得到一個解釋。

微觀的GM跟車模式還有一個很重要的特性，那就是幾乎所有的GM跟車模式都可以推導出一種相對應的巨觀車流模式，而這種特性使得交通工程師在做有關交通流的分析或是探討時，便顯得格外的重要。至於模式中參數值 (m 、 l) 的求法，則是利用統計的方法，由現場調查資料加以校估求得的。

若是以駕駛者行為的角度來看，傳統的GM跟車模型以車頭距來當作模式的變數顯然不符合駕駛者的行為，因為駕駛者通常會以自己本身與前車的車尾距離 (車間距) 當作跟車時相對距離判斷的依據；另外，Pipes的視覺反應跟車模型雖然解決了前述的缺點，不過該模式對於前後車位置函數的定義卻有不一致的地方，因此，本文就是希望能解決上述中傳統跟車模型中與駕駛者行為不符的缺點，以便在模式中能較確切的反應出駕駛者在跟車時的行為，並進一步推導出新的速率密度的模型。

三、新模式之推導

圖1是跟車模型中各項變數的關係圖，表1則是在本文中所會使用到的符號變數定義，在這裡，我們將從駕駛者行為的角度出發來推導兩個跟車模型，並

假設駕駛者在跟車時是符合GM模型的基本關係，也就是跟車反應是和刺激以及敏感度有關，如下所示：

$$\text{反應 (Response)} = \text{敏感度 (Sensitivity)} \times \text{刺激 (Stimulus)}$$

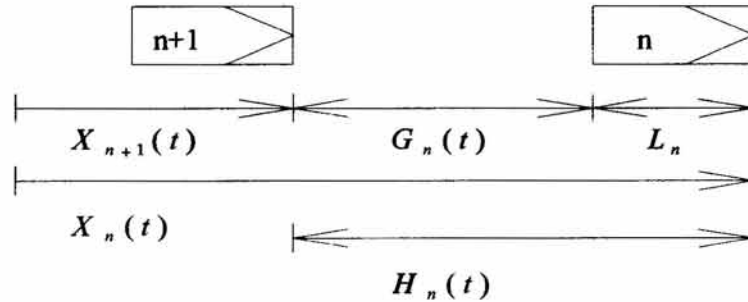


圖1 跟車模型變數基本關係圖

和GM跟車模型所不同的是GM跟車模型是將相對速度差當作刺激項，我們所要推導的模型A則是以相對面積的變化率當作模型的刺激項，主要的原因是駕駛者在跟車時，當前車加速前進後，後車駕駛者所觀察到的前車面積將會逐漸縮小，而當前車減速時，後車所觀察到的前車面積又會逐漸變大，因此駕駛者可以根據所觀察到前車面積的變化率來作為其加減速的參考依據

表1 符號變數表

變數說明		
[1]	n	前車
[2]	$n+1$	後車
[3]	$X_{n+1}(t)$	後車位置函數
[4]	$X_n(t)$	前車位置函數
[5]	$\dot{X}_{n+1}(t)$	後車速度函數
[6]	$\dot{X}_n(t)$	前車速度函數
[7]	$\ddot{X}_{n+1}(t)$	後車加速度函數
[8]	L_n	前車車長
[9]	$G_n(t)$	車間距
[10]	$H_n(t)$	車頭距
[11]	W_{11}	前車車寬
[12]	W_{12}	前車車高
[13]	$W_{21}(t)$	參考視窗寬度
[14]	$W_{22}(t)$	參考視窗高度
[15]	c, m, l, k, K	敏感度參數
[16]	δ	人眼到參考視窗的距離
[17]	A_1	前車面積
[18]	$A_2(t)$	參考視窗面積

首先，我們假設駕駛者在觀察前車時，在靠近駕駛者眼前會存在一參考視窗，如圖2所示，由於前車實際的面積是一個不變的常數，因此，當前車加速或減速時，駕駛者所感受到的前車面積變化率便可以由參考視窗來表示，當前車減速時，參考視窗會變大，而前車加速時則會使參考視窗變小，也就是說，參考視窗的面積是一個時間的函數。

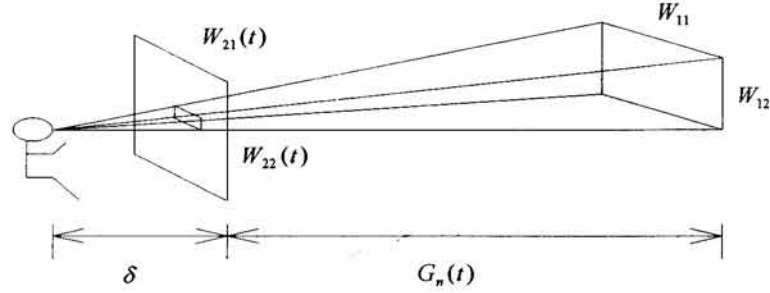


圖2 模型A跟車行為示意圖

(2) 式~(10) 式說明了圖1和圖2中，變數間的基本關係。

$$H_n(t) = X_n(t) - X_{n+1}(t) \quad (2)$$

$$\begin{aligned} G_n(t) &= X_n(t) - X_{n+1}(t) - L_n \\ &= H_n(t) - L_n \end{aligned} \quad (3)$$

$$G_n(t) + L_n = H_n(t) = \frac{1}{k} \quad (4)$$

$$G_n(t) = \frac{1}{k} - L_n \quad (5)$$

$$\dot{G}_n(t) = \dot{X}_n(t) - \dot{X}_{n+1}(t) = \dot{H}_n(t) \quad (6)$$

$$A_1 = W_{11} \cdot W_{12} \quad (7)$$

$$A_2(t) = W_{21}(t) \cdot W_{22}(t) \quad (8)$$

$$\frac{\delta}{\delta + G_n(t)} = \frac{W_{21}(t)}{W_{11}} = \frac{W_{22}(t)}{W_{12}} \quad (9)$$

$$\frac{A_2(t)}{A_1} = \frac{W_{21}(t) \cdot W_{22}(t)}{W_{11} \cdot W_{12}} = \frac{\delta^2}{(\delta + G_n(t))^2} \quad (10)$$

整理(7)式與(10)式，我們可以得到一個比較有用的參考視窗函數，如式(11)：

$$\begin{aligned}
A_2(t) &= \frac{\delta^2 A_1}{(\delta + G_n(t))^2} \\
&= \delta^2 W_{11} \cdot W_{12} (\delta + G_n(t))^{-2}
\end{aligned} \tag{11}$$

對 (11) 式微分，可以得到 (12) 式：

$$\begin{aligned}
\dot{A}_2(t) &= \frac{dA_2(t)}{dt} \\
&= -2\delta^2 W_{11} \cdot W_{12} \cdot (\delta + G_n(t))^{-3} \frac{dG_n(t)}{dt} \\
&= -2\delta^2 W_{11} \cdot W_{12} \cdot (G_n(t))^{-3} \left(1 + \frac{\delta}{G_n(t)}\right)^{-3} \frac{dG_n(t)}{dt}
\end{aligned} \tag{12}$$

$$\because G_n(t) \gg \delta$$

$$\therefore \frac{\delta}{G_n(t)} \cong 0$$

(12) 式可以寫成 (13) 式，另外，將 (2) 式、(3) 式以及 (4) 式帶入 (13) 式，整理可以得到 (14) 式，(14) 式就是參考視窗面積變化率的時間函數，從 (14) 式中我們可以知道，在給定 δ 、 W_{11} 、 W_{12} 後，參考視窗的面積變化率便只和車間距以及相對速度有關。

$$\dot{A}_2(t) = -2\delta^2 (W_{11} \cdot W_{12}) (G_n(t))^{-3} \frac{dG_n(t)}{dt} \tag{13}$$

$$\begin{aligned}
\dot{A}_2(t) &= -2\delta^2 (W_{11} \cdot W_{12}) \frac{\dot{X}_n(t) - \dot{X}_{n+1}(t)}{(X_n(t) - X_{n+1}(t) - L_n)^3} \\
&= -2\delta^2 (W_{11} \cdot W_{12}) \frac{\dot{H}_n(t)}{(H_n(t) - L_n)^3}
\end{aligned} \tag{14}$$

底下將進一步說明 (14) 式的意義，假設前後兩車原本以相同速度前進，現前車以一加速度前進，使得兩車的相對速度差為正，此時參考視窗的面積會因為前車遠離的關係而縮小，其面積變化率為負，也就是說相對速度和參考視窗的面積變化率為一反向的關係，另外，當兩車間距越大時，其參考視窗的面積變化率就越小。

現在，我們以刺激-反應方程式的基本關係為基礎，將參考視窗的面積變化率當作是刺激項，由於該項變數與相對速度為反向的關係，因此必需乘上一個負值，另外，敏感度則是後車速度的 m 次方項乘上一個敏感度參數值 c ，因此，模式的基本關係式便成了 (15) 式：

$$\dot{X}_{n+1}(t + \Delta t) = c \cdot (\dot{X}_{n+1}(t + \Delta t))^m (-\dot{A}_2(t)) \tag{15}$$

將 (14) 式帶入 (15) 式，可以得到 (16) 式，令 $2c\delta^2 W_{11} \cdot W_{12} = \alpha_a$ ，因此 (16) 式可以寫成 (17) 式，如下所示：

$$\begin{aligned} \ddot{X}_{n+1}(t+\Delta t) &= c \cdot (\dot{X}_{n+1}(t+\Delta t))^m (-1) (-2\delta^2 W_{11} \cdot W_{12} \frac{\dot{H}_n(t)}{(H_n(t) - L_n)^3}) \\ &= 2c\delta^2 W_{11} \cdot W_{12} (\dot{X}_{n+1}(t+\Delta t))^m \frac{\dot{H}_n(t)}{(H_n(t) - L_n)^3} \end{aligned} \quad (16)$$

$$\ddot{X}_{n+1}(t+\Delta t) = \alpha_a \frac{(\dot{X}_{n+1}(t+\Delta t))^m}{(X_n(t) - X_{n+1}(t) - L_n)^3} (X_n(t) - X_{n+1}(t)) \quad (17)$$

(17) 式就是模式A的跟車模型，基本上，這是屬於GM第五跟車模型的一種類型 ($l=3$)，所不同的是模式A的跟車模型，其分母的變數是車間距 (gap)，而非車頭距 (headway)，由於駕駛者在跟車時，只能感受到車間距而非車頭距，因此模式A的跟車模型便解決了GM跟車模型中，分母項變數為車頭距與駕駛行為不符的缺點。

另外，在本文模式的跟車模型中，其敏感度參數 α_a 也比GM模型的 α 值提供更多的訊息，由於 $\alpha_a = 2c\delta^2 W_{11} \cdot W_{12}$ ，因此我們可以從此項關係中得知，跟車模型的敏感度參數應該會和後車駕駛者所觀察到的前車面積有關，也就是說，當前車是一輛大車時，後車駕駛者的敏感度會提高，而這也符合一般駕駛者的跟車習慣；一般說來，當駕駛者跟著一部大車時，會因為前方車輛的面積較大而有壓迫感，從而提高警覺心，因此當前車煞車時，後車駕駛者所決定的減速度值自然會比前方為小車時來的大，而這減速度值的大小就反應在模式的敏感度參數值 α_a 上，從這個角度來看，模式A的跟車模型，其敏感度參數值 α_a 確實能提供比GM跟車模型中的參數值 α 較多的訊息。

前述的跟車模型A是以參考視窗的面積變化率為刺激項，其關係是屬於二維的，而底下所要推導的模式B則是以前車寬度的變化率為刺激項，是屬於一維的情形，如圖3所示，其符號變數的定義同表1。

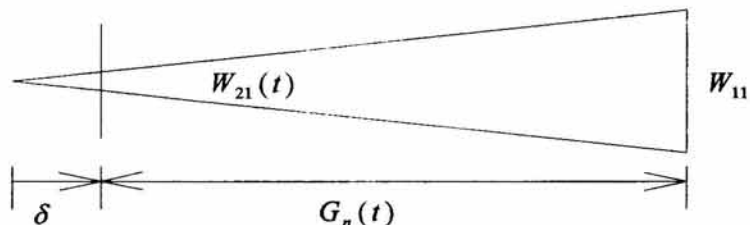


圖3 模型B的變數關係圖

從 (9) 式的關係中，我們可以得到參考視窗寬度的時間函，如 (17) 式所示，我們對 (17) 微分，可以得到參考視窗寬度變化率的時間函數，如 (18) 式所示：

$$\begin{aligned}
W_{21}(t) &= \frac{\delta \cdot W_{11}}{\delta + G_n(t)} \\
&= \delta W_{11} \cdot (\delta + G_n(t))^{-1}
\end{aligned} \tag{17}$$

$$\begin{aligned}
\dot{W}_{21}(t) &= \frac{dW_{21}(t)}{dt} \\
&= -\frac{\delta \cdot W_{11}}{(\delta + G_n(t))^2} \frac{dG_n(t)}{dt} \\
&= -\delta W_{11} \cdot (\delta + G_n(t))^{-2} \frac{dG_n(t)}{dt} \\
&= -\delta W_{11} \cdot (G_n(t))^{-2} \cdot \left(1 + \frac{\delta}{G_n(t)}\right)^{-2} \frac{dG_n(t)}{dt}
\end{aligned} \tag{18}$$

$$\begin{aligned}
&\because G_n(t) \gg \delta \\
&\therefore \frac{\delta}{G_n(t)} \cong 0
\end{aligned}$$

因此，(18)式可以寫成(19)式，將(3)式以及(6)式帶入(19)式，整理可得(20)式，如下所示：

$$\dot{W}_{21}(t) = -\delta W_{11} \cdot G_n(t)^{-2} \frac{dG_n(t)}{dt} \tag{19}$$

$$\begin{aligned}
\dot{W}_{21}(t) &= -\delta W_{11} \frac{\dot{X}_n(t) - \dot{X}_{n+1}(t)}{(X_n(t) - X_{n+1}(t) - L_n)^2} \\
&= -\delta W_{11} \frac{\dot{H}_n(t)}{(H_n(t) - L_n)^2}
\end{aligned} \tag{20}$$

相對於(18)式而言，(20)式是一個較有用的參考視窗寬度變化率的時間函數；假設前後兩車原本以相同速度前進，現前車以一加速度前進，使得兩車的相對速度差為正，此時參考視窗的寬度會因為前車遠離的關係而縮小，其寬度變化率為負，也就是說相對速度和參考視窗的寬度變化率為一反向的關係，另外，當兩車間距越大時，其參考視窗的寬度變化率就越小。

現在，我們同樣以刺激-反應方程式的基本關係為基礎，將參考視窗的寬度變化率當作是刺激項，由於該項變數與相對速度為反向的關係，因此必需乘上一個負值，另外，如同模式B一樣，敏感度是後車速度的 m 次方項乘上一個敏感度參數值 c ，因此，模式B的基本關係式便成了(21)式：

$$\dot{X}_{n+1}(t + \Delta t) = c \cdot (\dot{X}_{n+1}(t + \Delta t))^m (-\dot{W}_{21}(t)) \tag{21}$$

將(20)式帶入(21)式，可以得到(22)式，令 $\alpha_b = c\delta W_{11}$ ，因此(22)式可以寫成(23)式，如下所示：

$$\begin{aligned}\ddot{X}_{n+1}(t+\Delta t) &= c(\dot{X}_{n+1}(t+\Delta t))^m(-1)(-\delta W_{11} \cdot (G_n(t))^{-2} \frac{dG_n(t)}{dt}) \\ &= c\delta W_{11} \frac{(\dot{X}_{n+1}(t+\Delta t))^m}{(G_n(t))^2} \frac{dG_n(t)}{dt}\end{aligned}\quad (22)$$

$$\ddot{X}_{n+1}(t+\Delta t) = \alpha_b \frac{(\dot{X}_{n+1}(t+\Delta t))^m}{(X_n(t) - X_{n+1}(t) - L_n)^2} (\dot{X}_n(t) - \dot{X}_{n+1}(t)) \quad (23)$$

(23) 式就是模式B的跟車模型，如同模式A的跟車模型一樣，模式B也是屬於GM第五跟車模型的一種類型 ($l=2$)，由於模式B的跟車模型，其分母的變數也是車間距 (gap)，而非車頭距 (headway)，因此模式B的跟車模型同樣沒有GM跟車模型中，分母項變數為車頭距而與駕駛行為不符的缺點。

另外，如同模式A的跟車模型一樣，在模式B的跟車模型中，其敏感度參數 α_b 也比GM模型的 α 值提供更多的訊息，由於 $\alpha_b = c\delta W_{11}$ ，因此我們可以從此項關係中得知，模式B的跟車模型，其敏感度參數應該會和後車駕駛者所觀察到的前車寬度有關；如同在前述模式A的推導中，對敏感度參數值 α_a 所解釋的道理一樣，對模式B的敏感度參數值 α_b 而言，當前車煞車時，後車駕駛者所決定的減速度值自然會比前方為小車時來的大，而這減速度值的大小會反應在模式的敏感度參數值 α_b 上，從這個角度來看，模式B的跟車模型，其敏感度參數值 α_b 也會和模式A的敏感度參數值 α_a 一樣，能提供比GM跟車模型中的參數值 α 相對較多的訊息。

四、模式之特性分析

在這一節中，我們將對於上述所推導的兩個新視覺微觀跟車模型，推導出其相對應的巨觀速率密度模式，並對其特性做一些初步的探討。首先，我們先推導新的速率密度模式；考慮模式A的跟車模型，如(24)式，我們對(24)式移項，並將模式中的變數導入巨觀車流變數後加以積分可以得到(25)式，由於巨觀車流模型需要滿足兩項邊界條件，如(26)式，因此，將(26)式分別代入(25)式，可以解得(24)式中的未知參數C、D，如(27)式、(28)式，最後將參數C、D代入(25)式，可以得到微觀跟車模型A相對應的巨觀速率密度模式，如(29)式；另外，對於跟車模型B而言，我們也可以利用相同的步驟得到該巨觀的速率密度模式，如(30)式。

$$\ddot{X}_{n+1}(t+\Delta t) = F \frac{[\dot{X}_{n+1}(t+\Delta t)]^m [\dot{X}_n(t) - \dot{X}_{n+1}(t)]}{[X_n(t) - X_{n+1}(t) - L_n]^3} \quad (24)$$

$$\frac{dV}{dt} = \frac{X_{n+1}(t + \Delta t)}{[X_{n+1}(t + \Delta t)]^m} = F \frac{dGn(t)}{Gn(t)^3}$$

$$V^{-m} dV = F \cdot Gn(t)^{-3} dGn(t)$$

$$\frac{1}{1-m} V^{1-m} = -\frac{F}{2} Gn^{-2} + D$$

$$= -C \left(\frac{1}{K_j} - Ln \right)^{-2} + D \quad (25)$$

$$\begin{cases} V = 0, K = K_j \\ V = V_f, K = 0 \end{cases} \quad (26)$$

$$C = \frac{1}{1-m} V_f^{1-m} \left(\frac{1 - K_j \cdot Ln}{K_j} \right)^2 \quad (27)$$

$$D = \frac{1}{1-m} V_f^{1-m} \quad (28)$$

$$V = V_f \left[1 - \left(\frac{K - K_j \cdot K \cdot Ln}{K_j - K_j \cdot K \cdot Ln} \right)^2 \right]^{\frac{1}{1-m}} \quad (29)$$

$$V = V_f \left[1 - \left(\frac{K - K_j \cdot K \cdot Ln}{K_j - K_j \cdot K \cdot Ln} \right) \right]^{\frac{1}{1-m}} \quad (30)$$

(29) 式與 (30) 式與傳統GM第五跟車模型所推導出的速率密度模型最大的不同就是該模型對於傳統模型中的 k/k_j 項，改變為 $K - K_j \cdot K \cdot Ln / K_j - K_j \cdot K \cdot Ln$ ，由於改變後的變數包含車長，因此，新的速率密度模型可以反應不同車種對於速率密度的影響；此外，此項改變也說明了速率密度間的關係可以是非線性的關係，而非以往密度對於速率的影響是線性的限制，如圖4所示。

進一步說明圖4與 (29) 式與 (30) 式的意義。從圖4可以知道隨著車流密度的增加，其對於車流行進速率的影響是屬於一個凹形的曲線（模式B較接近線性關係），主要的原因是當起始車流密度很低時（速率為自由流），隨著密度的增加，此時因為車流密度增加而使車流速率減小的效應是會較不顯著的（對應著前半段較緩和的曲線），隨著密度的逐漸增加，當車流密度到達某一程度後，此時，車與車之間的自由度已明顯降低，也就是說，此時的車流速率對於密度的改變會十分的敏感，相同密度的變化量對於車流速率的改變會比密度低時來的大，這樣的現象我們可以利用圖4中後半段較陡峭的曲線來表示。

圖5與圖6則是選取不同參數 m 的數值，來觀察其速率密度的曲線（其中，圖5是分別選取 m 為 0.2、0.4、0.6 及 0.8，而圖6則是分別選取 m 為 0.1、0.3、0.5 及

0.7所得的結果)。從圖5可以知道，當模式A的參數 m 較高時，如 $m=0.8$ 時，其曲線形狀大約類似於西北大學所發展的速率密度模式；至於模式B，我們可以從圖6中知道，當參數 m 較低時，其曲線形狀和Greensfield類似，為一近似線性關係，當參數 m 較高時，如 $m=0.6$ 、 0.8 時，其曲線形狀和Underwood類似，為一凹形曲線。

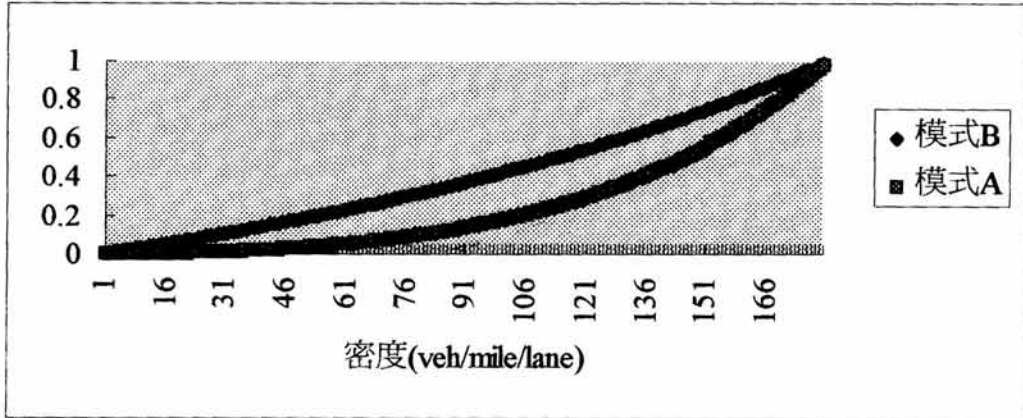


圖4 密度對於速率改變的非線性關係

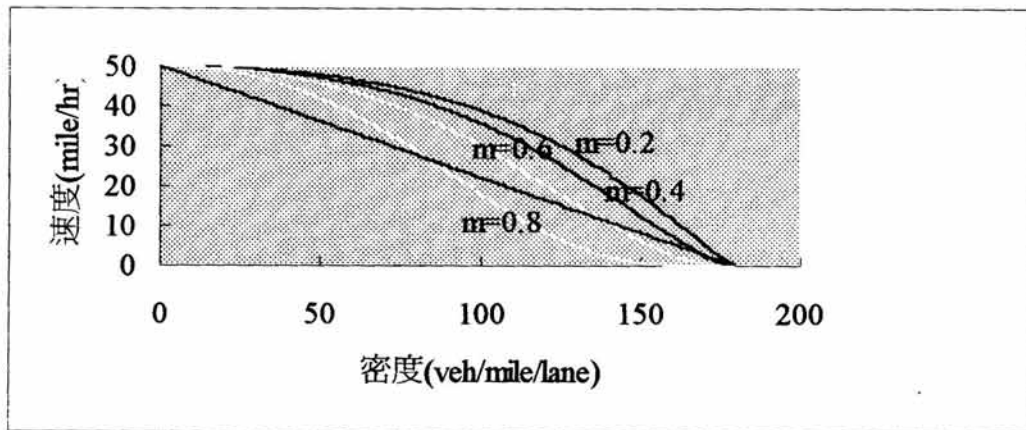


圖5 模式A中不同參數 m 的速率密度曲線

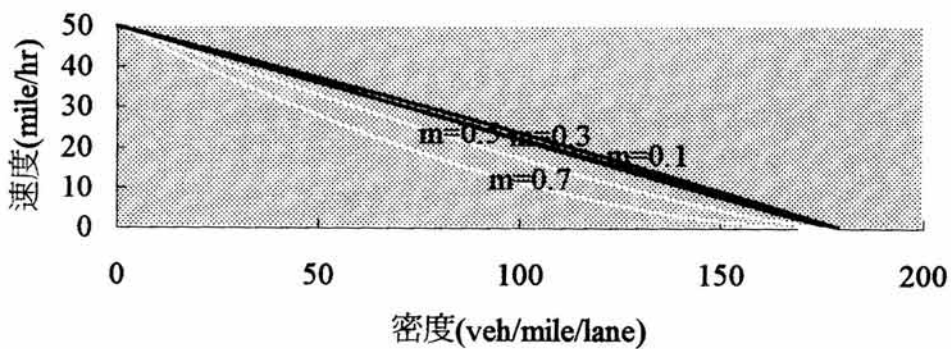


圖6 模式B中不同參數 m 的速率密度曲線

五、結論與建議

本文依據Pipes的視覺反應模式，引用安全跟車的理念，並且改善視覺反應的相關函數，從一次變動函數轉為面積變動函數，雖然這只是反應關係的修正，然而這可以說明不同的假設，適用於不同的狀況。另外本文也依據車輛長度在擁擠的時候將對原來跟車模式有所影響之外，也將影響密度速度函數的構建，根據上述之分析發現模式A在 $M=0.8$ 時，與過去各位學者專家所探討的密度速度函數最為接近，因此這個模式將被引用作為未來研究的重要課題。由於模式的推導只延用反應模式以及擁擠概念所形成，對於實際資料的驗證將在後續的研究中加以探討。

六、參考文獻

1. Adolf D. May, "Traffic Flow Fundamentals", Prentice-Hall Inc, 1990.
2. Drake J. S., Schofer J. L. and May A. D., "A Statistical Analysis of Speed-Density Hypotheses", Highway Research Record 156, 53-87, 1967.
3. Gerlough D. L. and Huber M. J., "Traffic Flow Theory- A Monograph", Transportation Research Board, Special Report 165, Washington D.C., 1975.
4. Greenberg H., "An Analysis of Traffic Flow", Operation Research 7, 79-85, 1959.
5. J.M. Del Castillo and F.G. Bentez, "On The Functional Form of The Speed-Density Relationship-I: General Theory", Transpn. Res.-B Vol. 29B, No.5, pp373-389, 1995.
6. Louis A. Pipes, "Car Following Models and The Fundamental Diagram of Road Traffic", Transpn Res. Vol. 1, pp.21-29, 1967.
7. Prigogine I. and Herman R., "Kinetic Theory of Vehicular Traffic", Elsevier, New York, 1971.
8. Underwood R. T., "Speed, Volume and Density Relationship, Quality and Theory of Traffic Flow", Yale Bureau of Highway Traffic, New Haven, Connecticut, pp141-188, 1961.