

機車碰撞車速推估之研究

張超群¹

蘇天保²

謝昇毅³

翁榮宏⁴

蔡崇景⁵

黃郁仁⁶

摘 要

本文應用動力學中的動量法，配合汽機車行向、機車倒地的刮地痕長度與方向、汽車煞車停止位置，來推估機車與汽車碰撞及機車與機車碰撞的速度。我們推導出碰撞速度計算式，並說明其基本假設和使用可行性。我們用幾個實際的行車事故鑑定案例來說明計算過程，並將推導出的公式寫成 Excel 檔以方便計算。

關鍵字：動量法、刮地痕、行車事故鑑定

一、前言

台灣機車交通事故繁多，其中以機車碰撞機車及機車與汽車碰撞所佔的比例最高。在行車事故鑑定中，許多案例都有肇事者要求評估車輛是否超速行駛。實務上車速是判斷責任歸屬比例的一個重要依據，若超速則會提升肇事責任一個等級。因此，如何較正確地估算碰撞車速，讓肇事者心服，便成為重要的課題。因機車表面不似汽車表面平整，不易用力學方法分析，來獲得正確的機車碰撞車速。歐美日等先進國家機車數量相對於汽車少很多，對車輛碰撞和鑑定的研究主要以汽車與汽車碰撞為主(Brach and Brach, 2005)。國內外對機車碰撞速度為研究主要求機車與汽車碰撞速度 (Obenski and Hill, 2002; McNally and Bartlett, 2002; 宋景芬、張國方, 1999; 羅智寧, 2008; 郭磊, 2008; 林峻弘, 2009)，但他們的車速推估方法太複雜，一般鑑定人員不易了解與使用，並且缺少機車與機車碰撞車速推估。目前市面上也有一些交通事故重建的模擬軟體，如 PC-CRASH (Steffan and Moser, 1996)，但執行

¹ 南臺科技大學機械工程系副教授。

² 臺南市停車管理處處長。

³ 臺南市車輛行車事故鑑定委員會主任委員。

⁴ 臺南市車輛行車事故鑑定委員會委員。

⁵ 臺南市車輛行車事故鑑定委員會委員。

⁶ 臺南市車輛行車事故鑑定委員會秘書(聯絡地址：710 台南市永康區南台街 1 號，電話 06-2533131 轉 3511，E-mail:ccchang@stust.edu.tw)。

這些專業軟體仍需要有一些動力學、車輛動力學的基礎。此外，購買這些軟體也需要大筆的金錢，並不是許多鑑定單位買得起的並會正確使用的。

應用動量法做車速推估，是根據車輛碰撞前後動量守恆(Brach and Brach, 2005；張超群等，2010)，再配合恢復係數(張超群、劉成群，2013)，事故現場留下的跡證，如煞車痕長度、刮地痕長度，騎士位置等以便反推求出碰撞前車速。本文再進一步簡化，除了不用恢復係數外，並且忽略旋轉效應，將機車與汽車視為質點，動量守恆應用於水平與垂直方向(x 方向和 y 方向)，即可求出機車碰撞車速。本文推估出來的車速，雖然可能誤差較大，但計算出來的車速是保守的，也就是說用本文方法算出來的車速若超速，則此車必超速。另外，本文方法具有簡單易用之優點，並且用 Excel 編寫成程式配上參數使用說明圖，放於網站上，方便不具力學背景的鑑定會委員與警察使用。

二、機車與汽車的碰撞

2.1 基本假設

機車與汽車碰撞較汽車與汽車碰撞複雜，主要原因是機車碰撞後，前輪與把手的方向與原來行駛方向改變較大，碰撞過程的能量損失不易計算。機車與汽車碰撞，機車有轉動，有時甚至轉動很大，但因機車質量小，質量慣性矩小，轉動能量可以忽略不計；而汽車質量大，碰撞過程中通常不發生轉動，即使有轉動也是很小的，因此轉動能量也可忽略不計。這樣機車與汽車都不考慮轉動，機車和汽車都可簡化為質點，可用質點碰撞處理。對交通事故重建之研究，車輛碰撞過程可分為三個階段，我們以 A 、 B 兩車發生碰撞之 A 車的流程圖來說明，如圖1所示：

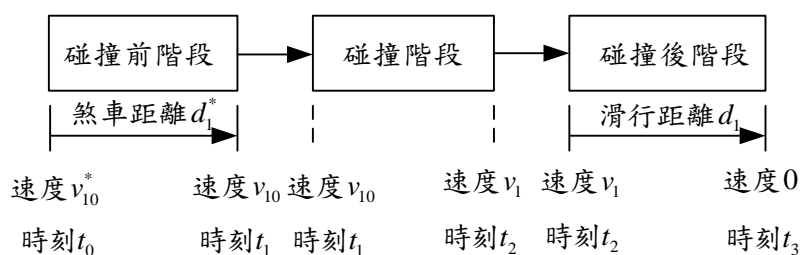


圖 1 碰撞過程分三個階段

(1) 碰撞前階段

從駕駛踩煞車到兩車剛接觸，稱為碰撞前階段 (Pre-impact)。參考圖1，駕駛踩煞車後，煞車從時刻 t_0 開始作用，此時車速 v_{10}^* ，到時刻 t_1 車輛留下煞車痕長度(或煞車距離) d_1^* ，此時車速 v_{10} 而與其他車輛發生碰撞。從時刻 t_0 到時刻 t_1 ，稱為碰撞前階段。

(2) 碰撞階段

從兩車剛接觸到兩車剛分離之階段，稱為碰撞階段 (Impact)。參考

圖 1，從時刻 t_1 兩車開始碰撞，此時車速 v_{10} ，到時刻 t_2 兩車碰撞結束，此時 A 車速的車 v_1 ，從時刻 t_1 到時刻 t_2 ，稱為碰撞階段。通常碰撞時間很短，因此， $t_2 - t_1 \approx 0$ 。

(3) 碰撞後階段

從兩車剛分離到車子完全停止，稱為碰撞後階段 (Post-impact)。參考圖 1，從時刻 t_2 兩車碰撞結束，此時車速 v_1 ，到時刻 t_3 ，A 車碰撞後滑行了 d_1 距離而停止，此時 A 車的速度為 0。從時刻 t_2 到時刻 t_3 ，稱為碰撞後階段。

本文以正粗體英文表示具有大小與方向的向量，一般斜體英文代表純量或符號。

2.2 碰撞後騎士的位置已知

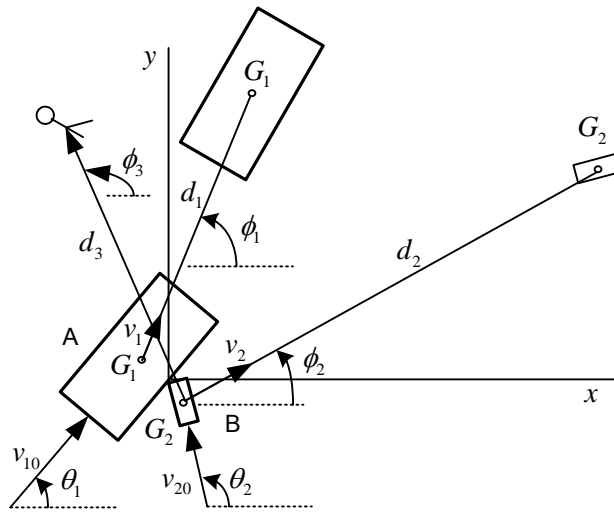


圖 2 機車與汽車碰撞示意圖

汽車碰撞機車後或機車碰撞汽車後，往往人車分離，除了汽車有滑行距離外，機車倒地後有刮地痕長度，還有機車騎士被拋出的距離。根據這些長度和距離可以分別計算汽車、機車、騎士碰撞後的速度。圖 2 所示為兩車碰撞模型的示意圖，A 車(汽車)行駛方向和正 x 軸方向(水平方向)的夾角為 θ_1 ，B 車(機車)行駛方向和正 x 軸方向的夾角為 θ_2 。取 A、B 車發生碰撞處為座標系原點 O ，設 A、B 車碰撞開始(碰撞前)的速度大小分別為 v_{10} 和 v_{20} ，A、B 車碰撞結束(碰撞後)的速度大小分別為 v_1 和 v_2 ，碰撞結束後 A 車、B 車、騎士分別以和正 x 方向成 ϕ_1 、 ϕ_2 、 ϕ_3 角，滑動距離 d_1 、 d_2 、 d_3 後停止。 θ_1 和 θ_2 稱為接近角 (Approach angle)，而 ϕ_1 、 ϕ_2 、 ϕ_3 稱為離去角 (Departure angle)。若不計車輛的變形、摩擦及旋轉運動，A 車及 B 車可視為質點 1 和 2，稱為二維碰撞簡易模型。根據動量守恆定律(張超群、劉成群，2013)，碰撞前後系統動量守恆，即

$$m_1 \mathbf{v}_{10} + (m_2 + m_3) \mathbf{v}_{20} = m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2 + m_3 \mathbf{v}_3 \quad (1)$$

式中 m_1 、 m_2 和 m_3 分別為 A、B 車與人的質量； \mathbf{v}_{10} 和 \mathbf{v}_{20} 為 A、B 車碰撞開始的速度； \mathbf{v}_1 、 \mathbf{v}_2 與 \mathbf{v}_3 分別為 A、B 車、人碰撞結束的速度。將方程式(1)投影到 x 、 y 方向，可得兩個純量方程式。在 x 方向為

$$m_1 v_{10} \cos \theta_1 + (m_2 + m_3) v_{20} \cos \theta_2 = m_1 v_1 \cos \phi_1 + m_2 v_2 \cos \phi_2 + m_3 v_3 \cos \phi_3 \quad (2)$$

而在 y 方向為

$$m_1 v_{10} \sin \theta_1 + (m_2 + m_3) v_{20} \sin \theta_2 = m_1 v_1 \sin \phi_1 + m_2 v_2 \sin \phi_2 + m_3 v_3 \sin \phi_3 \quad (3)$$

在(2)、(3)兩式中，我們假設碰撞前兩車的行駛方向是已知的，即 θ_1 和 θ_2 是確定的。

另一個假設是碰撞結束的車速為 v_1 和 v_2 ，可由 A 車煞車滑動距離 d_1 及 A 車輪胎與路面的摩擦係數 μ_1 ，應用功能原理(張超群、劉成群，2013) 求出：

$$v_1 = \sqrt{2\mu_1 g d_1} \quad (4)$$

式中重力加速度 $g = 9.81 \text{m/s}^2$ 。現今的汽車都大都含 ABS，車輛制動時路面上通常看不出有煞車痕。對 ABS 車輛，煞車距離 d_1 較無 ABS 的車輛距離短，因此應用公式(4)計算汽車車速的結果是偏於保守的。對含 ABS 汽車可使用(張超群等，2015)

$$v_1 = 1.1 \sqrt{2\mu_1 g d_1} \quad (5)$$

或仍使用(4)式，但提高摩擦係數 μ_1 之值。例如一般鑑定中 μ_1 取 0.75，但因 ABS 制動距離較短，對 ABS 車輛可取 $\mu_1 = (1.1)^2 \times 0.75 = 0.9$ ，這樣就可用方程式(4)求碰撞結束的車速為 v_1 。

機車倒地速度可視為機車碰撞結束車速，它可由路面留下的刮地痕長度 d_2 求得：

$$v_2 = \sqrt{2\mu_2 g d_2} \quad (6)$$

機車倒地後在瀝青路面上刮地痕摩擦係數通常機車左倒取 $\mu_2 = 0.5$ ，右倒取 $\mu_2 = 0.45$ (許哲嘉等，2007)。

參考圖 3，碰撞後機車騎士被拋出去的速度 v_3 ，可應用水平拋物體來計算(郭磊，2008)：

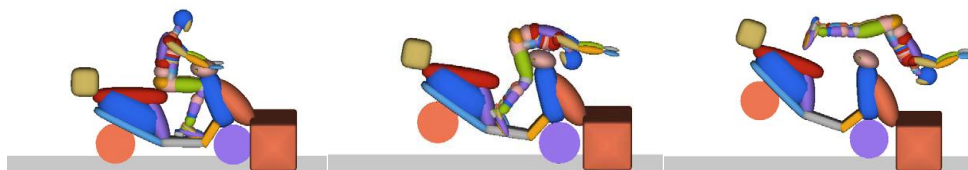


圖 3 碰撞後機車騎士被拋出去的方向 (郭磊，2008)

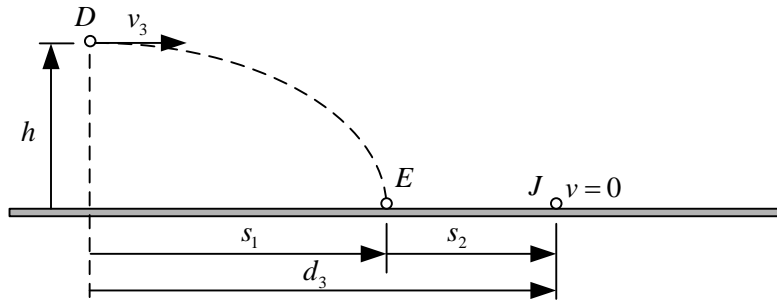


圖 4 水平拋物體運動

參考圖 4，因為忽略轉動動能，人體以質點表示，設人從 D 點以速度 v_3 被水平拋出後飛行距離 s_1 而著地， h 為人被拋出時重心的高度， t 為人體下落至地面所需的時間，不計空氣阻力

$$s_1 = v_3 t \quad (7)$$

$$h = \frac{1}{2} g t^2 \quad (8)$$

由上兩式消去時間 t ，得

$$s_1 = v_3 \sqrt{\frac{2h}{g}} \quad (9)$$

因不計空氣阻力，人著地時水平方向的速度仍為 v_3 ，因此人會繼續滑行距離 s_2 而停止，滑行距離可應用功能原理計算出，在 E 點的動能 $T_E = (1/2) m v_3^2$ ，在 J 點的動能 $T_J = 0$ ，由 E 點至 J 點，摩擦力 ($\mu_3 m_3 g$) 所作的負功為 $W_{E \rightarrow J} = -\mu_3 m_3 g s_2$ ，代入功能原理 $T_E + W_{E \rightarrow J} = T_J$ ，得

$$\frac{1}{2} m_3 v_3^2 - \mu_3 m_3 g s_2 = 0 \quad (10)$$

由此得

$$s_2 = \frac{v_3^2}{2\mu_3 g} \quad (11)$$

所以人體與碰撞點的水平距離 d_3 ：

$$d_3 = s_1 + s_2 = v_3 \sqrt{\frac{2h}{g}} + \frac{v_3^2}{2\mu_3 g} \quad (12)$$

解方程式(12)可得

$$v_3 = \mu_3 \sqrt{2g} \left(\sqrt{h + \frac{d_3}{\mu_3}} - \sqrt{h} \right) \quad (13)$$

其中 μ_3 為人體落到地面後與路面之間的滑動摩擦係數，通常取 $\mu_3 = 0.4 \sim 0.6$ 。

若騎士不是飛躍過汽車而是碰到汽車，就不能依照拋物線運動方式的計算方法來推估人體碰撞後的速度。這時可假設人體與汽車的碰撞為完全塑性碰撞（完全非彈性碰撞），也就是碰撞時，人體沒有反彈，碰撞瞬間人體和汽車的速度是相等的。後來由於汽車因煞車而減速，才與人體分開。也就是沿汽車行駛的縱軸方向（車身前後方向）人體被拋出的速度就是碰撞後汽車的速度 v_1 ，同時沿橫軸方向（車身左右方向），人體有初速度有慣性，假設不考慮切向摩擦力對人體初速度的影響，那麼沿橫軸方向碰撞後仍保持碰撞前的速度 v_{20} ，它和縱軸方向的 v_1 合向量成就是人體拋出的速度 v_3 （郭磊，2008）。

應用(2)至(8)式，可用矩陣方程解得碰撞開始的車速 v_{10} 、 v_{20} 如下：

$$\begin{bmatrix} v_{10} \\ v_{20} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_1 \cos \theta_1 & (m_2 + m_3) \cos \theta_2 \\ m_1 \sin \theta_1 & (m_2 + m_3) \sin \theta_2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} m_1 v_1 \cos \phi_1 + m_2 v_2 \cos \phi_2 + m_3 v_3 \cos \phi_3 \\ m_1 v_1 \sin \phi_1 + m_2 v_2 \sin \phi_2 + m_3 v_3 \sin \phi_3 \end{bmatrix} \quad (14)$$

對常見的機車與汽車在十字路口發生的垂直碰撞，若汽車 A 向東行駛，機車 B 向北行駛，可取

$$\theta_1 = 0^\circ, \theta_2 = 90^\circ, \sin \theta_1 = 0, \cos \theta_1 = 1, \sin \theta_2 = 1, \cos \theta_2 = 0 \quad (15)$$

代入(2)式，得

$$m_1 v_{10} = m_1 v_1 \cos \phi_1 + m_2 v_2 \cos \phi_2 + m_3 v_3 \cos \phi_3$$

解得

$$v_{10} = \frac{m_1 v_1 \cos \phi_1 + m_2 v_2 \cos \phi_2 + m_3 v_3 \cos \phi_3}{m_1} \quad (16)$$

同理，將(15)代入(3)式，得

$$(m_2 + m_3) v_{20} = m_1 v_1 \sin \phi_1 + m_2 v_2 \sin \phi_2 + m_3 v_3 \sin \phi_3$$

解得

$$v_{20} = \frac{m_1 v_1 \sin \phi_1 + m_2 v_2 \sin \phi_2 + m_3 v_3 \sin \phi_3}{m_2 + m_3} \quad (17)$$

例 1 機車由南向北行駛於十字路口碰撞到由西向東行駛的汽車，碰撞後機車、與騎士碰撞後位置，如圖 5 所示。兩部車的資料、碰撞角度、人車碰撞後與碰撞點的距離，如表 1 所示。

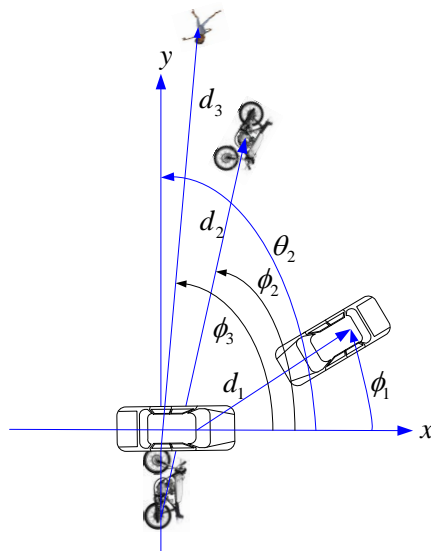


圖 5 機車垂直碰撞汽車簡易模型示意圖

表 1 兩部車的資料

| | | | |
|------------------|------------|---------------|-------|
| 汽車接近角 θ_1 | 0° | 機車質量 m_2 | 150kg |
| 機車接近角 θ_2 | 90° | 騎士質量 m_3 | 80kg |
| 汽車離去角 ϕ_1 | 25° | 汽車滑行距離 d_1 | 6m |
| 機車離去角 ϕ_2 | 70° | 機車刮地痕距離 d_2 | 13.6m |
| 騎士離去角 ϕ_3 | 85° | 騎士拋出距離 d_3 | 15.8m |
| 汽車質量 m_1 | 1200kg | | |

設汽車輪胎與路面的摩擦係數 $\mu_1 = 0.75$ ，機車左倒刮地痕摩擦係數 $\mu_2 = 0.5$ ，人體落到地面後與路面之間的滑動摩擦係數 $\mu_3 = 0.5$ 。

汽車碰撞後的速度 v_1 ，可由(4)式求出

$$v_1 = \sqrt{2\mu_1 g d_1} = \sqrt{2 \times 0.75 \times 9.81 \times 6} = 9.39 \text{ m/s} = 33.80 \text{ km/h}$$

應用方程式(6)，機車碰撞後的速度 v_2 ：

$$v_2 = \sqrt{2\mu_2 g d_2} = \sqrt{2 \times 0.5 \times 9.81 \times 13.6} = 11.55 \text{ m/s} = 41.58 \text{ km/h}$$

設騎士碰撞後拋出時重心高度 $h = 1.1 \text{ m}$ ，由方程式(12)求得水平拋出的速度 v_3 ：

$$v_3 = \mu_3 \sqrt{2g} \left(\sqrt{h + \frac{d_3}{\mu_3}} - \sqrt{h} \right) = 0.5 \times \sqrt{2 \times 9.81} \left(\sqrt{1.1 + \frac{15.8}{0.5}} - \sqrt{1.1} \right)$$

$$= 10.34 \text{ m/s} = 37.22 \text{ km/h}$$

此題為機車垂直碰撞汽車，由方程式(16)求得汽車碰撞前車速

$$v_{10} = \frac{m_1 v_1 \cos \phi_1 + m_2 v_2 \cos \phi_2 + m_3 v_3 \cos \phi_3}{m_1}$$

$$= \frac{1200 \times 9.39 \times \cos 25^\circ + 150 \times 11.55 \times \cos 70^\circ + 80 \times 10.34 \times \cos 85^\circ}{1200}$$

$$= 9.06 \text{ m/s} = 32.62 \text{ km/h}$$

應用方程式(17)，得機車碰撞前的速度

$$v_{20} = \frac{m_1 v_1 \sin \phi_1 + m_2 v_2 \sin \phi_2 + m_3 v_3 \sin \phi_3}{m_2 + m_3}$$

$$= \frac{1200 \times 9.39 \times \sin 25^\circ + 150 \times 11.55 \times \sin 70^\circ + 80 \times 10.34 \times \sin 85^\circ}{150 + 80}$$

$$= 31.36 \text{ m/s} = 112.90 \text{ km/h}$$

2.3 碰撞後騎士的位置未知

通常行車事故鑑定中的現場圖常不包含騎士的位置，這時的忽略騎士的機車與汽車碰撞模型示意圖，如圖 6 所示。

當不計車輛的變形及旋轉運動，A 車及 B 車可視為質點 1 和 2，並忽略摩擦及騎士碰撞後的動量，稱為忽略騎士的機車二維碰撞簡易模型。根據動量守恆定律，碰撞前後系統動量守恆，即

$$m_1 \mathbf{v}_{10} + (m_2 + m_3) \mathbf{v}_{20} = m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2 \quad (18)$$

式中 m_1 、 m_2 和 m_3 分別為 A、B 車與人的質量； \mathbf{v}_{10} 和 \mathbf{v}_{20} 為 A、B 車碰撞開始的速度； \mathbf{v}_1 、 \mathbf{v}_2 與 \mathbf{v}_3 分別為 A、B 車、人碰撞結束的速度。將方程(18)投影到 x 、 y 方向，可得兩個純量方程。在 x 方向為

$$m_1 v_{10} \cos \theta_1 + (m_2 + m_3) v_{20} \cos \theta_2 = m_1 v_1 \cos \phi_1 + m_2 v_2 \cos \phi_2 \quad (19)$$

而在 y 方向為

$$m_1 v_{10} \sin \theta_1 + (m_2 + m_3) v_{20} \sin \theta_2 = m_1 v_1 \sin \phi_1 + m_2 v_2 \sin \phi_2 \quad (20)$$

應用方程(19)至(20)式，可用矩陣方程解得碰撞開始的車速 v_{10} 、 v_{20} 如下：

$$\begin{bmatrix} v_{10} \\ v_{20} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_1 \cos \theta_1 & (m_2 + m_3) \cos \theta_2 \\ m_1 \sin \theta_1 & (m_2 + m_3) \sin \theta_2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} m_1 v_1 \cos \phi_1 + m_2 v_2 \cos \phi_2 \\ m_1 v_1 \sin \phi_1 + m_2 v_2 \sin \phi_2 \end{bmatrix} \quad (21)$$

假設再忽略騎士碰撞前的質量，方程式(21)可進一步簡化為

$$\begin{bmatrix} v_{10} \\ v_{20} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_1 \cos \theta_1 & m_2 \cos \theta_2 \\ m_1 \sin \theta_1 & m_2 \sin \theta_2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} m_1 v_1 \cos \phi_1 + m_2 v_2 \cos \phi_2 \\ m_1 v_1 \sin \phi_1 + m_2 v_2 \sin \phi_2 \end{bmatrix} \quad (22)$$

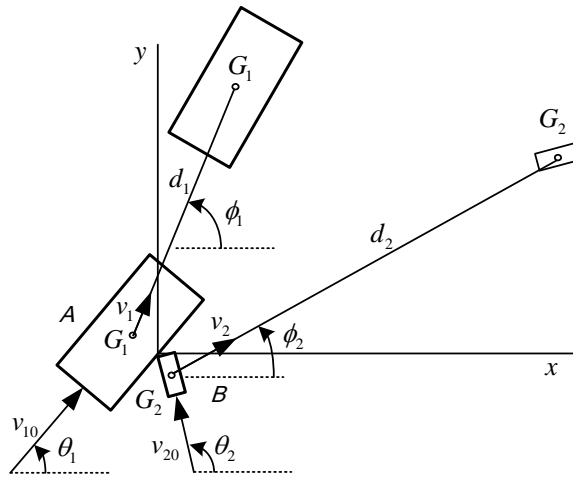


圖 6 忽略騎士的機車與汽車碰撞模型示意圖

三、機車與機車的碰撞

忽略旋轉運動時，機車與機車碰撞的車速推估方法與機車與汽車碰撞相似。兩部機車碰撞的示意圖如圖 7 所示，符號的定義與圖 2 相同，但多了機車 B 騎士質量 m_4 。根據動量守恆定律，碰撞前後系統動量守恆，即

$$(m_1 + m_3)\mathbf{v}_{10} + (m_2 + m_4)\mathbf{v}_{20} = m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2 + m_3\mathbf{v}_3 + m_4\mathbf{v}_4 \quad (23)$$

式中 m_1 、 m_2 分別為 A、B 車的質量； m_3 、 m_4 分別為 A、B 車騎士的質量； \mathbf{v}_{10} 和 \mathbf{v}_{20} 分別為 A、B 車碰撞開始的速度； \mathbf{v}_1 、 \mathbf{v}_2 分別為 A、B 車碰撞結束的速度； \mathbf{v}_3 、 \mathbf{v}_4 分別為 A、B 車騎士碰撞結束的速度。將方程式(23)投影到 x 、 y 方向，可得兩個純量方程式。在 x 方向為

$$(m_1 + m_3)v_{10} \cos \theta_1 + (m_2 + m_4)v_{20} \cos \theta_2 = m_1 v_1 \cos \phi_1 + m_2 v_2 \cos \phi_2 + m_3 v_3 \cos \phi_3 + m_4 v_4 \cos \phi_4 \quad (24)$$

而在 y 方向為

$$(m_1 + m_3)v_{10} \sin \theta_1 + (m_2 + m_4)v_{20} \sin \theta_2 = m_1 v_1 \sin \phi_1 + m_2 v_2 \sin \phi_2 + m_3 v_3 \sin \phi_3 + m_4 v_4 \sin \phi_4 \quad (25)$$

可用矩陣方程解得碰撞開始的車速 v_{10} 、 v_{20} 如下：

$$\begin{bmatrix} v_{10} \\ v_{20} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (m_1 + m_3) \cos \theta_1 & (m_2 + m_4) \cos \theta_2 \\ (m_1 + m_3) \sin \theta_1 & (m_2 + m_4) \sin \theta_2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} m_1 v_1 \cos \phi_1 + m_2 v_2 \cos \phi_2 + m_3 v_3 \cos \phi_3 + m_4 v_4 \cos \phi_4 \\ m_1 v_1 \sin \phi_1 + m_2 v_2 \sin \phi_2 + m_3 v_3 \sin \phi_3 + m_4 v_4 \sin \phi_4 \end{bmatrix} \quad (26)$$

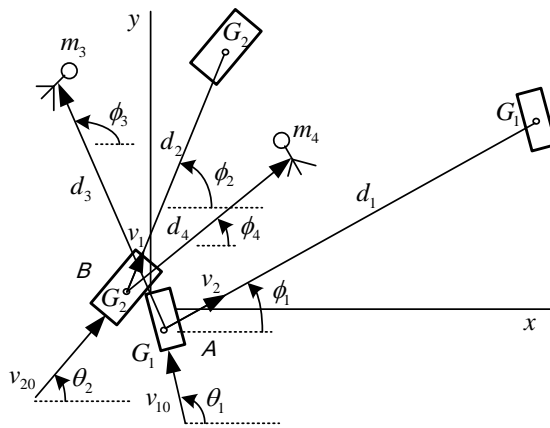


圖 7 機車與機車碰撞模型示意圖

通常行車事故鑑定中的現場圖不包含騎士的位置，在作機車與機車碰撞的車速推估，將兩位騎士質量忽略，也就是令方程式(26)中 $m_3 = 0$ 、 $m_4 = 0$ ，車速推估就簡化成

$$\begin{bmatrix} v_{10} \\ v_{20} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_1 \cos \theta_1 & m_2 \cos \theta_2 \\ m_1 \sin \theta_1 & m_2 \sin \theta_2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} m_1 v_1 \cos \phi_1 + m_2 v_2 \cos \phi_2 \\ m_1 v_1 \sin \phi_1 + m_2 v_2 \sin \phi_2 \end{bmatrix} \quad (27)$$

四、實際案例分析

機車碰撞車速推估的步驟大致如下：

(1)畫出碰撞示意圖；(2)列出計算所需的參數及其值；(3)運用合適的公式計算。

例 2：兩部機車於字路口發生碰撞，其事故現場圖如圖 7 所示，推估兩部機車碰撞時的速度。

- (1) 畫出碰撞示意圖：根據現場圖畫出碰撞示意圖，如圖 8 所示。
- (2) 列出計算所需的參數及其值：如表 2 所示。

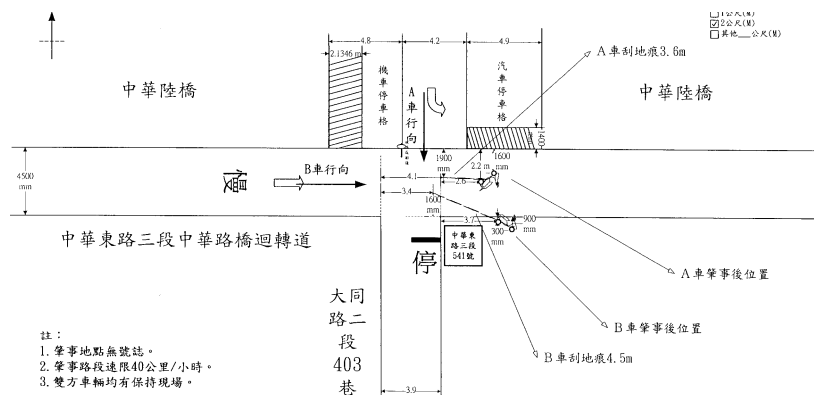


圖 8 兩部機車碰撞的現場圖

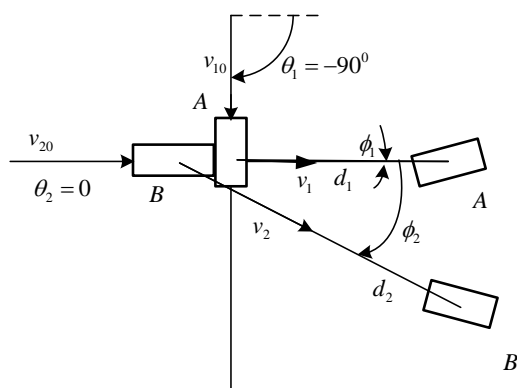


圖 9 圖 8 之碰撞示意圖

表 2 兩部機車的資料

| | | | |
|---------------------|-------------|--------------------|-------|
| 機車 A 接近角 θ_1 | -90° | 機車 A 質量 m_1 | 110kg |
| 機車 A 離去角 ϕ_1 | 0° | 機車 B 質量 m_2 | 110kg |
| 機車 B 接近角 θ_2 | 0° | 機車 A 右倒刮地痕長度 d_1 | 3.6m |
| 機車 B 離去角 ϕ_2 | -35° | 機車 B 左倒刮地痕長度 d_2 | 4.5m |

(3) 運用合適的公式計算：

機車 A 右倒刮地痕摩擦係數 $\mu_1 = 0.45$ ，機車 B 左倒刮地痕摩擦係數 $\mu_2 = 0.5$ ，因機車 A 碰撞後刮地長度 $d_1 = 3.6\text{m}$ ，機車 B 碰撞後刮地長度 $d_2 = 4.5\text{m}$ ，由公式(4)、(6)求出機車倒地時的車速

$$v_1 = \sqrt{2\mu_1 g d_1} = \sqrt{2 \times 0.45 \times 9.81 \times 3.6} = 5.64 \text{ m/s} = 20.30 \text{ km/h}$$

$$v_2 = \sqrt{2\mu_2 g d_2} = \sqrt{2 \times 0.5 \times 9.81 \times 4.5} = 6.64 \text{ m/s} = 23.92 \text{ km/h}$$

因騎士位置未畫出，應用公式(27)

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} v_{10} \\ v_{20} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} m_1 \cos \theta_1 & m_2 \cos \theta_2 \\ m_1 \sin \theta_1 & m_2 \sin \theta_2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} m_1 v_1 \cos \phi_1 + m_2 v_2 \cos \phi_2 \\ m_1 v_1 \sin \phi_1 + m_2 v_2 \sin \phi_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 110 \cos(-90^\circ) & 65 \cos 0^\circ \\ 65 \sin(-90^\circ) & 65 \sin 0^\circ \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 110 \times 5.64 \cos 0^\circ + 110 \times 6.64 \cos(-35^\circ) \\ 110 \times 5.64 \sin 0^\circ + 110 \times 6.64 \sin(-35^\circ) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.81 \\ 11.08 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

求得碰撞開始機車 A 的速度與汽車 B 的速度

$$v_{10} = 3.81 \text{ m/s} = 13.72 \text{ km/h}, \quad v_{20} = 11.08 \text{ m/s} = 39.89 \text{ km/h}$$

上述的計算結果，可用南臺科技大學交通事故力學網站 (<http://faculty.stust.edu.tw/~ccchang/traffic>) 中的機車碰撞簡易模型來計算，其 Excel 計算結果如圖 10 所示。

| | | | | | | | |
|----|-------------------------------------|---|----------|----------|----------|-------|--|
| 8 | 碰撞後車速 | $v_1 = \sqrt{2\mu_1 g d_1}$ | μ_1 | d_1 | v_1 | S_1 | |
| 9 | | | 0.45 | 3.6 | 5.64 | 20.30 | |
| 10 | | $v_2 = \sqrt{2\mu_2 g d_2}$ | μ_2 | d_2 | v_2 | S_2 | |
| 11 | | | 0.5 | 4.5 | 6.64 | 23.92 | |
| 12 | | | | | | | |
| 13 | 利用反矩陣計算碰撞前車速 | | | | | | |
| 14 | | $\begin{bmatrix} v_{10} \\ v_{20} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_1 \cos \theta_1 & m_2 \cos \theta_2 \\ m_1 \sin \theta_1 & m_2 \sin \theta_2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} m_1 v_1 \cos \phi_1 + m_2 v_2 \cos \phi_2 \\ m_1 v_1 \sin \phi_1 + m_2 v_2 \sin \phi_2 \end{bmatrix}$ | | | | | |
| 15 | | | | | | | |
| 16 | | | | | | | |
| 17 | m_1 | θ_1 | ϕ_1 | v_{10} | S_{10} | | |
| 18 | 110 | -90 | 0 | 3.81 | 13.72 | | |
| 19 | m_2 | θ_2 | ϕ_2 | v_{20} | S_{20} | | |
| 20 | 110 | 0 | -35 | 11.08 | 39.89 | | |
| 21 | | | | | | | |
| 22 | g : 重力加速度 (9.81m/s ²) | | | | | | |
| 23 | μ_1, μ_2 : 1、2車摩擦係數 | | | | | | |
| 24 | d_1, d_2 : 1、2車碰撞後滑行距離 (m) | | | | | | |
| 25 | | | | | | | |

圖 10 Excel 計算結果

若假設 A 車騎士質量 $m_3 = 65\text{kg}$ ，B 車騎士質量 $m_4 = 70\text{kg}$ ，因為現場圖沒有碰撞後騎士的位置，無法計算騎士碰撞後速度，假設不計騎士碰撞後的人體速度，也就是假設 $v_3 = 0, v_4 = 0$ ，代入方程式(26)

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} v_{10} \\ v_{20} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} (m_1 + m_3) \cos \theta_1 & (m_2 + m_4) \cos \theta_2 \\ (m_1 + m_3) \sin \theta_1 & (m_2 + m_4) \sin \theta_2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} m_1 v_1 \cos \phi_1 + m_2 v_2 \cos \phi_2 + m_3 v_3 \cos \phi_3 + m_4 v_4 \cos \phi_4 \\ m_1 v_1 \sin \phi_1 + m_2 v_2 \sin \phi_2 + m_3 v_3 \sin \phi_3 + m_4 v_4 \sin \phi_4 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (110 + 65) \cos(-90^\circ) & (110 + 70) \cos 0^\circ \\ (110 + 65) \sin(-90^\circ) & (110 + 70) \sin 0^\circ \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 110 \times 5.64 \cos 0^\circ + 110 \times 6.64 \cos(-35^\circ) + 0 + 0 \\ 110 \times 5.64 \sin 0^\circ + 110 \times 6.64 \sin(-35^\circ) + 0 + 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2.47 \\ 6.77 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

求得碰撞開始機車 A 的速度與汽車 B 的速度

$$v_{10} = 2.47 \text{ m/s} = 8.88 \text{ km/h}, \quad v_{20} = 6.77 \text{ m/s} = 24.37 \text{ km/h}$$

討論:若現場圖不含騎士，因沒有騎士倒地位置，無法計算騎士碰撞後速度。若假設騎士碰撞後速度 $v_3 = 0, v_4 = 0$ ，並計及騎士質量 m_3 和 m_4 ，則對機車車速 v_{10} 、 v_{20} 影響很大，並且車速變小，這是因為方程式(26)中少算 $m_3 v_3 \cos \phi_3 + m_4 v_4 \cos \phi_4$ 及 $m_3 v_3 \sin \phi_3 + m_4 v_4 \sin \phi_4$ 。因此，若現場圖不含騎士，並假設騎士碰撞後速度 $v_3 = 0, v_4 = 0$ ，並計及騎士質量 m_3 和 m_4 ，這樣算出來機車超速的話，就必定超速。

例 3：汽車 B 由東向西行駛在斜十字路口撞擊由西南向東北行駛的機車 A，其事故現場圖如圖 11 所示，推估兩部車碰撞時的速度。

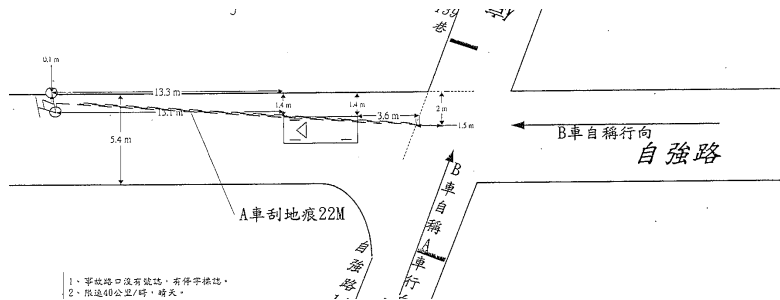


圖 11 汽車碰撞機車的現場圖

- (1) 畫出碰撞示意圖：根據現場圖畫出碰撞示意圖，如圖 11 所示。
 (2) 列出計算所需的參數及其值：如表 3 所示。

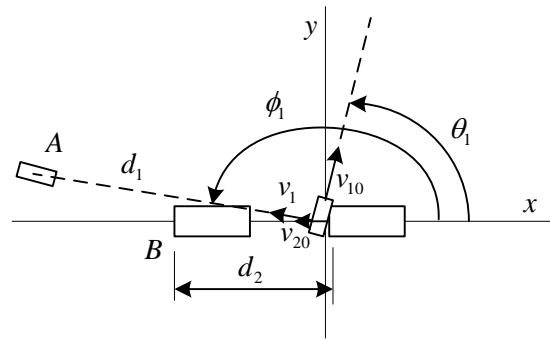


圖 12 圖 11 之碰撞示意圖

表 3 機車與汽車的資料

| | | | |
|---------------------|-------------|--------------------|--------|
| 機車 A 接近角 θ_1 | 75° | 機車 A 質量 m_1 | 110kg |
| 機車 A 離去角 ϕ_1 | 165° | 汽車 B 質量 m_2 | 1300kg |
| 汽車 B 接近角 θ_2 | 180° | 機車 A 右側刮地痕長度 d_1 | 22m |
| 汽車 B 離去角 ϕ_2 | 180° | 汽車 B 制動長度 d_2 | 10m |

- (3) 運用合適的公式計算：

因機車 A 右側刮地痕摩擦係數 $\mu_1 = 0.45$ ，由公式求出機車倒地時的車速

$$v_1 = \sqrt{2\mu_1 g d_1} = \sqrt{2 \times 0.45 \times 9.81 \times 22} = 13.937 \text{ m/s} = 50.17 \text{ km/h}$$

汽車 B 與機車 A 的碰撞點可假設為機車刮地痕延長線與汽車行駛方向的交點，從碰撞點到汽車停止位置的距離 $d_2 = 10\text{m}$ 。因汽車有 ABS，制動時路面沒有煞車痕，可假設汽車與地面的摩擦係數 $\mu_2 = 0.9$ ，汽車碰撞結速時的車速

$$v_2 = \sqrt{2\mu_2 g d_2} = \sqrt{2 \times 0.9 \times 9.81 \times 10} = 13.29 \text{ m/s} = 47.84 \text{ km/h}$$

應用公式

$$\begin{bmatrix} v_{10} \\ v_{20} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_1 \cos \theta_1 & m_2 \cos \theta_2 \\ m_1 \sin \theta_1 & m_2 \sin \theta_2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} m_1 v_1 \cos \phi_1 + m_2 v_2 \cos \phi_2 \\ m_1 v_1 \sin \phi_1 + m_2 v_2 \sin \phi_2 \end{bmatrix}$$

求得碰撞開始機車 A 的速度與汽車 B 的速度

$$v_{10} = 3.73 \text{ m/s} = 13.43 \text{ km/h}, \quad v_{20} = 14.51 \text{ m/s} = 52.23 \text{ km/h}$$

若 A 車騎士質量 $m_3 = 65\text{kg}$ ，因為現場圖沒有碰撞後騎士的位置，假設不計騎士碰撞後的人體速度，也就是假設 $v_3 = 0$ ，因為騎士在 A 車，方程式(14)改成

$$\begin{bmatrix} v_{10} \\ v_{20} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (m_1 + m_3) \cos \theta_1 & m_2 \cos \theta_2 \\ (m_1 + m_3) \sin \theta_1 & m_2 \sin \theta_2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} m_1 v_1 \cos \phi_1 + m_2 v_2 \cos \phi_2 + m_3 v_3 \cos \phi_3 \\ m_1 v_1 \sin \phi_1 + m_2 v_2 \sin \phi_2 + m_3 v_3 \sin \phi_3 \end{bmatrix}$$

代入相關數據得碰撞開始機車 A 的速度與汽車 B 的速度 $v_{10} = 2.35 \text{ m/s} = 8.45 \text{ km/h}$ 、 $v_{20} = 14.51 \text{ m/s} = 52.23 \text{ km/h}$ 。

討論:若現場圖不含騎士，假設其速度 $v_3 = 0$ ，並計及騎士質量 m_3 ，則影響機車車速 v_{10} ，但不改變汽車車速計算值 v_{20} 。若假設其速度 $v_3 \neq 0$ ，並計及騎士質量 m_3 ，汽車車速計算值 v_{20} 變化不大，原因是汽車質量遠大於騎士質量。

例 4：貨車 B 與機車 A 於十字路口發生碰撞，其現場圖如圖 13(a)所示。推估兩部車碰撞時的速度。

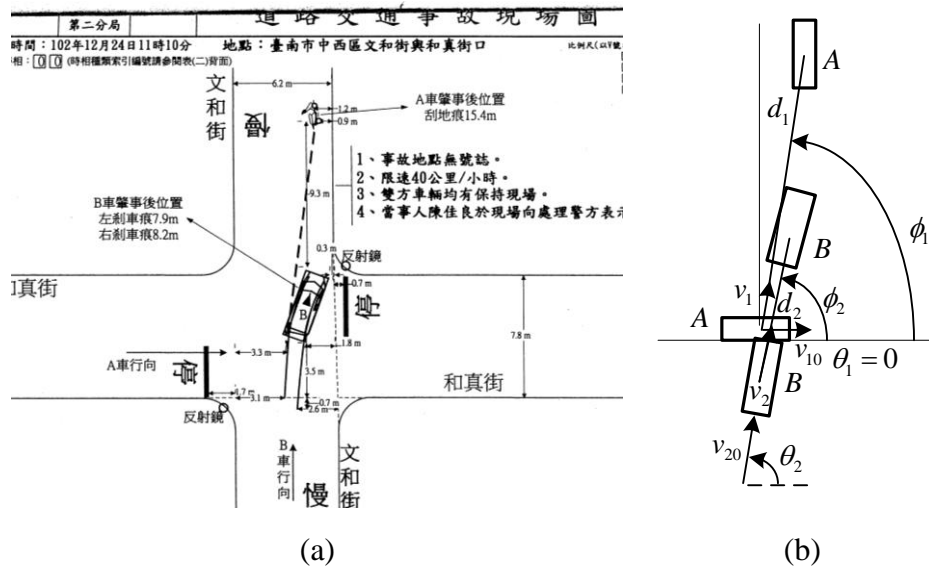


圖 13 貨車碰撞機車的現場圖與碰撞示意圖

表 4 機車與貨車的資料

| | | | |
|---------------------|--------|--------------------|--------|
| 機車 A 接近角 θ_1 | 0^0 | 機車 A 質量 m_1 | 175kg |
| 機車 A 離去角 ϕ_1 | 85^0 | 貨車 B 質量 m_2 | 2360kg |
| 貨車 B 接近角 θ_2 | 85^0 | 機車 A 左倒刮地痕長度 d_1 | 15.4m |
| 貨車 B 離去角 ϕ_2 | 80^0 | 貨車 B 制動長度 d_2 | 6.05m |

(1)畫出碰撞示意圖：根據現場圖畫出碰撞示意圖，如圖 13(b)所示。

(2)列出計算所需的參數及其值：如表 4 所示。

(3)運用合適的公式計算：

機車 A 左側刮地痕摩擦係數 $\mu_1 = 0.5$ ，求出機車倒地時的車速

$$v_1 = \sqrt{2\mu_1 g d_1} = \sqrt{2 \times 0.5 \times 9.81 \times 15.4} = 12.29 \text{ m/s} = 44.25 \text{ km/h}$$

貨車 B 煞車痕的長度等於左右輪煞車痕長度的平均值(張超群等，2015)即 $(7.9+8.2)/2=8.05$ 公尺，與機車 A 的碰撞點至貨車停止煞車痕的長度 $d_2 = 6.05 \text{ m}$ ，汽車與地面的摩擦係數 $\mu_2 = 0.75$ ，由公式求出貨車碰撞結束時的車速

$$v_2 = \sqrt{2\mu_2 g d_2} = \sqrt{2 \times 0.75 \times 9.81 \times 6.05} = 9.44 \text{ m/s} = 33.97 \text{ km/h}$$

應用公式(22)

$$\begin{bmatrix} v_{10} \\ v_{20} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_1 \cos \theta_1 & m_2 \cos \theta_2 \\ m_1 \sin \theta_1 & m_2 \sin \theta_2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} m_1 v_1 \cos \phi_1 + m_2 v_2 \cos \phi_2 \\ m_1 v_1 \sin \phi_1 + m_2 v_2 \sin \phi_2 \end{bmatrix}$$

求得碰撞開始機車 A 的速度

$$v_{10} = 11.13 \text{ m/s} = 40.08 \text{ km/h}$$

貨車 B 的速度

$$v_{20} = 10.24 \text{ m/s} = 36.86 \text{ km/h}$$

若要計算貨車踩煞車時之車速，須再加貨車碰撞前 $8.05-6.05=2$ 公尺煞車痕所造成的減速，這時可用公式 $v_{20}^* = \sqrt{v_{20}^2 + 2\mu_2 g d_2^*}$ (張超群等，2015)，得到貨車煞車開始作用的速度 v_{20}^* ：

$$v_{20}^* = \sqrt{v_{20}^2 + 2\mu_2 g d_2^*} = \sqrt{10.24^2 + 2 \times 0.75 \times 9.81 \times 2} = 11.59 \text{ (m/s)} = 41.72 \text{ (km/h)}$$

五、結論

本文在忽略轉動能量、摩擦與變形的假設下，將機車與汽車視為質點。應用車輛碰撞前後動量守恆於水平與垂直方向，配合汽機車行向、機車倒地的刮地痕長度與方向、汽車停止位置，得到速度計算式來推估機車與汽車碰撞、機車與機車碰撞的速度。我們用實際車鑑會案例來說明上述模型的計算方法與步驟。本文推估出來的車速，雖然可能誤差較大，但我們計算出來的車速是保守的，也就是說用本文方法算出來的車速若超速，則此車必超速。另外，本文速度計算方法具有簡單易用之優點，並且用 Excel 編寫成程式配上參數使用說明圖，放於交通事故力學網站 (<http://faculty.stust.edu.tw/~ccchang/traffic>) 上，方便不具力學背景的鑑定會委員與警察使用。

致謝

感謝臺南市車輛行車事故鑑定委員會提供會議案件作為本文之案例。

參考文獻

- 宋景芬、張國方(1999)，「摩托車碰撞交通事故再現研究」，*武漢汽車工業大學學報*，第二十一卷，第二期，頁 1-3。
- 林峻弘(2009)，*機車事故鑑定之行車速度推估研究*，龍華科技大學工程技術研究所碩士論文。
- 施人維(2012)，*汽機車同向碰撞行車事故之模擬*，臺灣科技大學機械工程系碩士論文。
- 郭磊(2008)，*汽車與兩輪車碰撞事故的仿真研究及應用*，上海交通大學機械與動力工程學院博士論文。
- 許哲嘉、吳宗霖、翁榮宏、黃國平、吳樹遠、徐銘聰(2007)，「輕型機車倒地時刮地痕摩擦係數探討」，*九十五年度車輛行車事故鑑定技術研討會*。
- 張超群、許哲嘉、彭守道、黃國平(2011)，「汽車二維碰撞車速計算模型之研究」，*交通學報*，第十卷第二期，頁 139-162。
- 張超群、蘇天保、翁榮宏、黃郁仁(2015)，「由煞車痕與刮地痕推估車速之研究」，*104 年道路交通安全與執法研討會論文集*，頁 167-181。
- 張超群、劉成群(2013)，*動力學*，臺北：新文京開發出版股份有限公司。
- 羅智寧(2008)，*汽車與摩托車碰撞事故車速估計建模*，吉林大學碩士論文。
- Brach, R. M. and Brach, R. M. (2005), *Vehicle Accident Analysis and Reconstruction Methods*, Warrendale, PA: SAE International.
- McNally, B. F. and Bartlett, W. (2002), "Motorcycle Speed Estimates Using Conservation of Linear and Rotational Momentum", *20th Annual Special Problems in Traffic Crash Reconstruction at the Institute of Police Technology and Management*.
- Obenski, K. S. and Hill, P. F. (2002), *Motorcycle Accident Reconstruction and Litigation*, 3rd ed., Tucson, AZ: Lawyers & Judges Publishing Company.
- Steffan, H. and Moser, A. (1996), "The Collision and Trajectory Models of PC-CRASH", SAE 960886.